XIX КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

The 19th KOLMOGOROV READINGS

ADVANCED EDUCATION AND SCIENCE CENTER

Proceedings of
the 19th International Scientific Conference of students
Kolmogorov readings
May 5-8, 2019

MATHEMATICS

Moscow

2019

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

(факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова

Московского государственного университета

имени М.В. Ломоносова

Материалы

XIX Международной научной конференции школьников

«Колмогоровские чтения»

5-8 мая 2019

МАТЕМАТИКА

Москва

2019

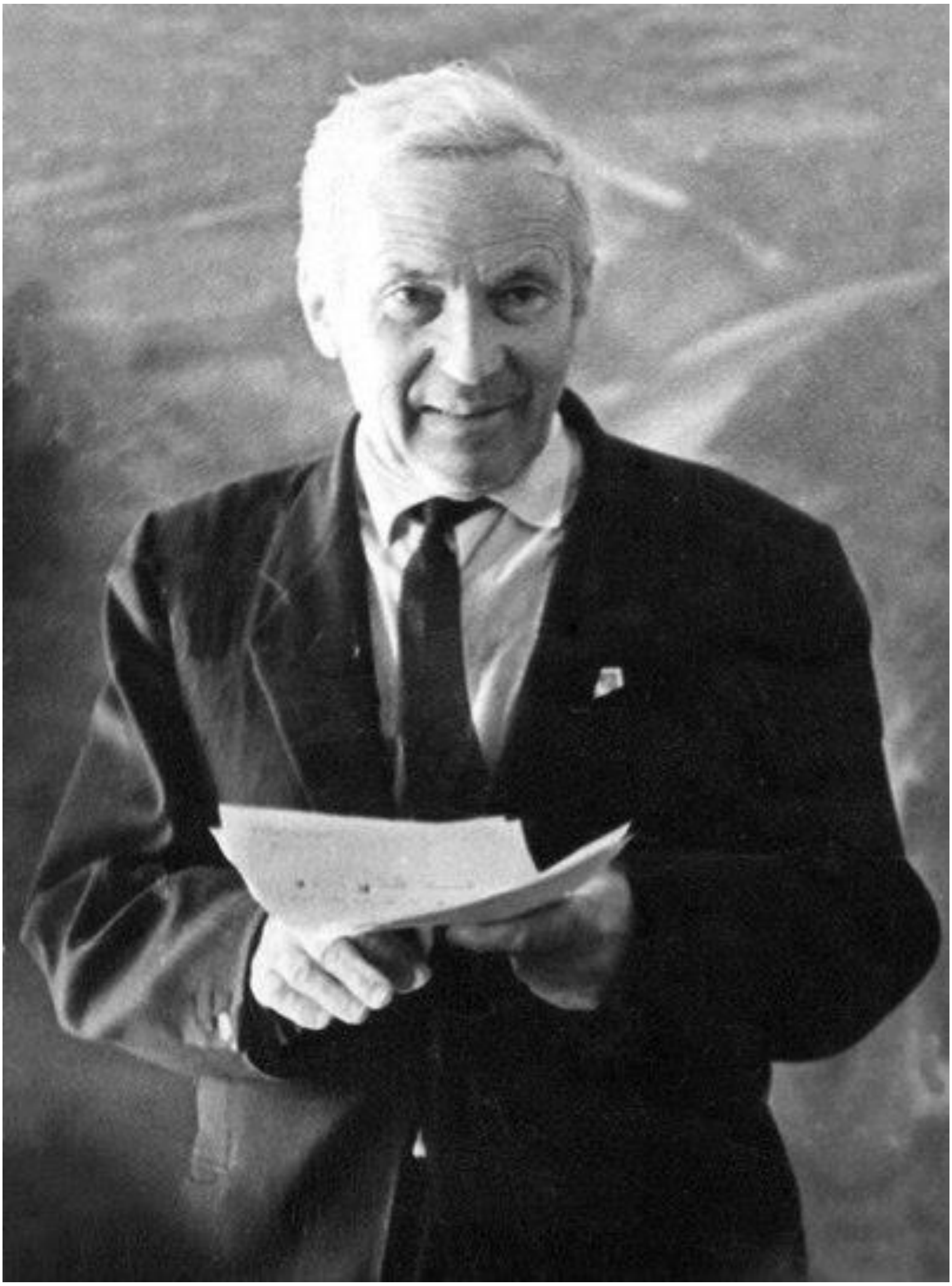
Председатель организационного комитета
XIX Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»:
академик В.А. Садовничий

Редакционный совет сборника тезисов «Математика»:
И.Н. Сергеев (председатель), В.Н. Дубровский, Ю.В. Курышова

Материалы
XIX Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»

В настоящий сборник вошли тезисы приглашённых докладчиков XIX Международной научной конференции школьников «Колмогоровские чтения» по секции «Математика»

© Специализированный учебно-научный центр (факультет) –
школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета имени
М.В. Ломоносова, 2019 г.



Как в спорте не сразу ставят рекорды, так и подготовка к настоящему научному творчеству требует тренировки.

А.Н. Колмогоров

CONTAINING GEOMETRIC OBJECTS WITH RANDOM INSCRIBED TRIANGLES IN A CIRCLE

Chan Tsz Hin
10 grade, Hong Kong Pui Ching Middle School, China

Mr. Lee Ho Fung, Master of Philosophy in Mathematics
of the Chinese University of Hong Kong

In this paper, we aim to investigate the probability of an inscribed triangle in a given circle containing certain geometric objects. Our paper is motivated by a Putnam problem in 1992.

We study three generalizations in containing: (i) an arbitrary point, (ii) an arbitrary line segment which lies on a diameter, and (iii) a concentric circle.

For the case of an arbitrary point, a closed form expressed by the Spence's function is obtained. For the case of an arbitrary line segment, we use numerical approximations to calculate the probability, namely the trapezoidal rule and the Monte Carlo integration. For the case of a concentric circle, we successfully find an explicit formula that depends on the radius of the concentric circle.

FROM CLOSE MATCH PROBLEM TO THE GENERATION OF IDENTITIES OF BINOMIAL COEFFICIENTS AND TRIGONOMETRIC TERMS

Cheung Pui Sang Joshua
11 grade, Hong Kong Pui Ching Middle School, China

Mr. Lee Ho Fung, Master of Philosophy in Mathematics
of the Chinese University of Hong Kong

This paper is inspired by a problem in 2013 Australian Mathematics Competition, regarding the number of ways can the first 12 goals of a hockey game be scored if the difference of scores of the teams have never exceeded 2. We firstly solved the original problem with a counting method. Then we generalize the problem and solve it using two different approaches, namely combinatorial method and matrices method, while the latter method is also used to deal with the probabilistic aspect of the problem. In the former method we constructed a "pseudo-Pascal triangle" and used its properties to eventuate a formula, and in the latter we have defined a vector and tridiagonal Toeplitz matrix, diagonalized it with help of some trigonometric identities and come up with another formula. Finally, we generate some interesting identities relating of binomial coefficients and trigonometric terms.

GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF TWIN GROUPS

Krivovichev Aleksei

11 grade, Laboratory for Continuous Mathematical Education, Saint-Petersburg, Russia

Scientific advisor: Ilya Alekseev, Laboratory of Modern Algebra and Applications, research assistant

In our research, we will study the theory of doodles and twins, which is sub-theory of combinatorial topology. Twins are similar to braids shadows, whereas doodles are similar to links shadows. A doodle on a surface is a union of several closed curves that are intersecting transversally. For twins and doodles, the first and the second Reidemeister moves are only allowed. Due to M. Khovanov, any doodle can be presented as a closure of some twin. This means that any regularity between doodles can be stated in terms of twins so it is natural to study twin groups on several strands. These groups belong to the class of right-angled Coxeter groups and one can ask which general group theory problems can be solved for them. For example, the geometric group theory of right-angled Coxeter groups is well known, but it would be interesting to find exacts answers for some questions like determining cone types. Indeed, using cone types of the twin groups one can derive some algebraic properties of twins and hence doodles. In their 2017 year paper, V. Bardakov, M. Singh, and A. Vesnin ask whenever twin groups are residually nilpotent. We develop geometric methods in order to find an answer to this open question. In general, the theory of lower central series for right-angled Coxeter groups is an open and complex field. We give a complete description of the cone types. More precisely, we introduce some special classes of twins called basic involutions and prove all cone types are exhausted by their cone types. Moreover, we prove that every involution is conjugate to some basic involution. What is more important, we prove that all twin groups are residually nilpotent. It seems that our methods can be generalized for all right-angled Coxeter groups.

Bibliography:

1. Bardakov V, Singh M., Vesnin A. Structural aspects of twin and pure twin groups, 2018.
2. Khovanov M. Doodle groups, 1997.
3. Gongopadhyay S. Dey, K. Commutator Subgroups of Twin Groups and Grothendieck’s Cartographical Groups, 2018.

GEODESICS IN THE DISCRETE HEISENBERG GROUP

Magdiev Ruslan
11 grade, Laboratory for Continuous Mathematical Education, Saint-Petersburg, Russia

Scientific advisor: Ilya Alekseev, Laboratory of Modern Algebra and Applications, research assistant

In my research, I study geodesic words in the Discrete Heisenberg group H(Z). This group is a subgroup in the continuous Heisenberg group H(R) of some matrices with real coefficients.

Geodesic words in the alphabet of two generators correspond to the shortest words representing a given element and play an essential role in the geometric group theory of H(Z). They are connected with geodesic curves in H(R). There is an important 2016's conjecture in geodesic growth theory related to the behavior of geodesic words in H(Z). In 1989, M.Shapiro introduced a geometric interpretation of words in H(Z) in terms of polygonal chains on a plane lattice Z×Z. He used this to study combinatorial and geometric properties of the language of geodesics and proved that it is not regular (in the sense of CS). In 2017, while studying boundaries at infinity of finitely generated groups, A.Vershik and A.Maluytin have found a grammar description of so-called «infinite geodesic words» in H(Z) i.e. infinite words whose any finite prefix-subword is geodesic. They noticed that there exist some geodesic words that cannot be described as prefixes of some infinite geodesic words, and also geodesic words (for example, geodesic words that correspond to closed polygonal chains) that cannot be continued to longer geodesic words even by one letter. In geometric group theory, such words are called dead end words. It turned out that the structure of geodesic words is complicated and unclear.

In my research, I give a complete description of geodesic words in H(Z). It turned out that all geodesic representatives of dead end elements correspond to closed polygonal chains that enclose oriented polyominoes of the minimal perimeter with a given area. The most unexpected is that any geodesic word in H(Z) is a prefix of some dead end word. This gives an amazing connection between the language of geodesic words in H(Z) and polyominoes, which was never mentioned or noticed before. As a result, the open problem of describing geodesic words in H(Z) was completely solved. It is remarkable that the group H(Z) is a free nilpotent group of rank two, so my results imply that any geodesic word in any nilpotent group of rank two is a part of minimal perimeter polyomino. My methods also give a new approach to the rationality of the geodesic growth of groups problem, stated in 2016.

Bibliography:
1. Vershik A.M., Malyutin A.V. Infinite Geodesics in the Discrete Heisenberg Group, J Math Sci (2017) 232:121.
2. Shapiro M. A geometric approach to the almost convexity and growth of some nilpotent groups, Math. Ann., 285, (1989).
3. Clary M., Margalit D. Office Hours with a Geometric Group Theorist, Princeton University Press (2017)

ON MINIMAL CROSSING NUMBER BRAID DIAGRAMS AND HOMOGENEOUS BRAIDS

Mamedov Geidar

11 grade, Laboratory for Continuous Mathematical Education,

Saint-Petersburg, Russia

Scientific advisor: Ilya Alekseev, Laboratory of Modern Algebra and Applications, research assistant

In my research, I study braids, especially minimal crossing number diagrams of braids. Diagrams of braids correspond to words (in the standard Artin generators) in braid groups so that minimal crossings number diagrams correspond to geodesic, i.e. shortest words in the sense of geometric group theory. There is a problem due to J.Stallings (problem 1.8 in Kirby's List) whether geodesic braid words are closed under end extension (replacing a final letter “s” by “ss...s”). Stallings conjecture states that any geodesic word in braid groups is expandable. On the one hand, a behavior of geodesic words in braid groups is unclear and complicated because there are no general necessary or sufficient conditions on a braid word to be geodesic. On the other hand, there are outstanding problems on minimal diagrams of knots and links, some of which are solved. In his paper, J. Stallings introduced homogeneous braid words. They are important because of their relation to fibered links. A special case of homogeneous words is positive words, which are all geodesics. The class of homogeneous braid words also include a class of alternating braid words. We prove the following result:

Theorem 1. Any homogeneous word is geodesic.

This implies that Stallings conjecture holds true for homogeneous braid diagrams. In particular case for positive words, this fact is well known. We also study some asymptotic relations between the number of homogeneous braid words and geodesic words. We make the following conjecture:

Conjecture. A word representative of a homogeneous braid is geodesic if and only if it is homogeneous.

We prove this conjecture for alternating braids.

Theorem 2. A word representative of an alternating braid is geodesic if and only if it is alternating.

Bibliography:

1. Kirby, Robion. (Ed.). Problems in Low-Dimensional Topology, 1995
2. Stallings, John. Constructions of fibred knots and links, 1978
3. M. Clary, D. Margalit, Office Hours with a Geometric Group Theorist, Princeton University Press, 2017

THE STUDY OF AREA OF GEOMETRIC FIGURES OBTAINED BY CONSTRUCTING SQUARES ON THE SIDES OF A TRIANGLE

Mr. Paschakapan Saichon, Mr. Pholphum Kamthorntaksina And Mr. Thanaphume Leksakulchai

10/11 grade, School Mahidol Wittayanusorn, Thailand

Advisor: Dr. Thanatkrit Kaewtem, Co-Advisor Dr. Kirati Sriamorn
Department Mathematics and Computational Science

Given a triangle, we construct three squares on the sides of the triangle, and then draw three line segments connecting pairs of adjacent corners of the squares, and attach three squares on the segments. This project aims at investigating area of the geometric figures arising from the construction when the procedure is repeated. Using Geogebra and elementary geometry, we obtain explicit formulas for sequences of area of the figures in each step of the construction.

БИЛЬЯРДЫ С ПОДКРУТКОЙ

Бардамов Илья, Баннов Денис

11/10 классы, Специализированный учебно-научный центр (факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва

Научный руководитель: старший лаборант СУНЦ МГУ Никита Константинович Башаев

В нашей работе мы изучаем различные свойства «бильярдов с подкруткой». Отметим, что наша работа была вдохновлена задачей № 3 с 7-го Санкт-Петербургского турнира юных математиков. Бильярдный стол полагается некоторым многоугольником, шар при этом движется по дугам окружностей.

Изначально шар начинает двигаться по дуге некоторой произвольной окружности, а после удара о стенку продолжает движение по дуге окружности, зеркально-симметричной данной. Основную роль в нашем исследовании играет понятие «развёртки» траектории. К примеру, в случае квадратного бильярдного стола, оно позволяет доказать, что траектория всегда замкнута, а также построить траектории с разными замечательными свойствами.

Наши основные результаты:

- исследованы траектории с наперёд заданным количеством касаний или ударов о стенки бильярдного стола;
- исследованы траектории с наперёд заданным количеством прохождений через центр стола;
- исследовано поведение траекторий на столах в форме произвольных 3- и 4- угольников и правильного пятиугольника.

Список литературы:

Гальперин Г.А., Земляков А.Н.. Математические бильярды. —М.: Наука, 1990 (Библиотечка «Квант». Вып. 77).

КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРАФАХ

Горев Вадим, Касимов Руслан

11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва

Научный руководитель: старший лаборант СУНЦ МГУ
Никита Константинович Башаев

Функцию на графе называют *гармонической* если значение в каждой вершине равно среднему по её соседям. Можно привести множество примеров гармонических функций из математики и физики, все они обладают рядом замечательных свойств. В своей работе мы вводим понятие *квазигармонической* функции, разрешая упомянутым равенствам нарушаться не более чем на некоторую фиксированную величину.

Целью было понять, как сильно будут отличаться полученные функции от гармонических. Нам оказались полезны линейная алгебра, анализ, векторные и матричные нормы, сжимающие отображения, линейные рекуррентные уравнения и язык Python.

Обозначим за T вектор из разностей между значением в вершине и средним по её соседям. Наши основные результаты:

- при незначительных ограничениях на граф существует биекция между векторами T и квазигармоническими функциями, зависимость между ними является аффинной;
- квазигармонические функции образуют параллелепипед в n-мерном пространстве;
- функция с максимальным отклонением от гармонической соответствует вектору T с максимальными координатами; также мы предлагаем эффективные оценки на максимальное отклонение для данного графа;
- мы исследуем итерационные процессы для нахождения функции с заданным T и их скорость сходимости; с помощью этого строим оценку на максимальное отклонение.

Список литературы:
1. Сосинский А.Б. Мыльные плёнки и случайные блуждания. (https://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.6.pdf)
2. Christakis Nicholas A., Fowler James H. The Spread of Obesity in a Large Social Network over 32 Years. (https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMsa066082)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЗАМОЩЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Бильданов Равиль, Горяченко Вадим
10/11 классы, Специализированный учебно-научный центр при Новосибирском государственном университете.
Научный руководитель: д.ф.-м.н, проф. А. В. Васильев

Замощением n-мерного пространства в геометрии называется разбиение n-мерного пространства n-мерными многогранниками без перекрытия (см., например, [1,2]). Понятие замощения переносится на теорию групп, где замощением называется разбиение группы на два (или больше) множества таких, что каждый элемент группы единственным образом представляется в виде произведения элемента первого множества и элемента второго множества.

Для абелевых (коммутативных) групп задача описания её замощений с заданными свойствами изучалась многими авторами (см. [3]). Однако в случае произвольных (не коммутативных) конечных групп неизвестен даже ответ на следующий вопрос: верно ли, что для любой группы порядка n и любых натуральных чисел a и b таких, что $n = ab$, найдутся два множества мощности a и b, которые являются замощением данной группы.

В данной работе мы даём положительный ответ на этот вопрос для конечных разрешимых групп, т. е. для групп, обладающих конечным рядом нормальных подгрупп с абелевыми факторами (см., например, [4]).

Теорема. Пусть G — конечная разрешимая группа порядка n, натуральные числа a и b таковы, что $n = ab$. Тогда в группе G найдутся подмножества A и B, мощностей a и b соответственно, для которых $G = AB$.

Список литературы:

1. Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников // Квант. 1970. № 3.
2. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. London: Methuen, 1948.
3. SzaboS., SandsA. D. Factoring Groups into Subsets. London: Taylor Francis. 2009.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

СРАВНЕНИЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Ефанова Ксения

9 класс, школа ГБОУ ОЦ «Протон», Москва

Научные руководители: Татьяна Сергеевна Моксякова,
д.ф.-м.н., профессор РГГУ, МГУ и Независимого Университета
Георгий Борисович Шабат

Цель работы:

- научиться сравнивать большие числа;
- применять на практике полученные знания.

Число 9999999999999999 настолько велико, что его трудно назвать. Число 999999! (почти миллион-факториал!) ещё больше, но назвать его можно, и можно записать выражением всего в 7 символов.

Огромными числами и их именами интересовался ещё Архимед, написавший целую книгу «Псаммит» (др.-греч. Ψαμμίτης, Исчисление песчинок). А в наше время эти числа можно изучать с помощью компьютеров... но они довольно быстро начинают становиться гигантскими, переполняя память компьютера. Тогда приходится подумать!

Для исследования больших чисел я использовала логарифмирование и формулу Стирлинга. С помощью этих методов были получены данные, по которым были выведены основные закономерности.

Список литературы:

1. Википедия http://nujen-sovet.ru/katalog/obuchenie-kak-nazivayut-chisla-velikany-kak-nazivayutsya-bolshie-chisla-nazvaniya-bolshix-chisel.php
2. Литвуд Дж. Математическая смесь.— М.: Наука, 1973, стр. 105—110.
3. Перельман Я.И. Занимательная астрономия. —М., Изд-во: Технико-теоретической литературы, 1954. —212 С.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Зобова Ирина

10 класс, Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа № 17 с углубленным изучением отдельных предметов, г. Щелково, МО

Научный руководитель: к.ф.-м. н, учитель математики МАОУ СОШ № 17 г. Щелково, Наталья Владимировна Батхина

Целью настоящего исследования является применение методов степенной геометрии к исследованию особых точек алгебраических кривых и к поиску приближенных значений корней многочленов.

Рассматривается алгебраическое уравнение от двух переменных с произвольными коэффициентами. Каждому его моному ставится в соответствие двумерный целочисленный вектор показателей степеней входящих в него переменных. Множество этих векторов называется *носителем* многочлена. Далее строится выпуклая линейная оболочка носителя — *многоугольник Ньютона*. Каждому ребру этого многоугольника соответствует укороченное уравнение, которое обладает следующим свойством: если исходное уравнение имеет решение в виде ряда по степеням переменной, то первый член этого ряда есть решение некоторого укороченного уравнения. Этот подход используется для определения типа особых точек некоторых алгебраических кривых и разложения в ряды их ветвей в окрестности особой точки. Для тех кривых, которые допускают рациональную параметризацию, полученные разложения сравнивались с разложением точной рациональной параметризации кривой.

Для алгебраического уравнения от одной переменной можно рассматривать ломаную Адамара — некоторый аналог многоугольника Ньютона, учитывающий не только показатели степеней одночленов, но и их коэффициенты. Укороченные уравнения в этом случае имеют малые степени, корни которых проще найти, и которые будут начальными приближениями корней исходного уравнения. Этот метод был применён к нахождению первых приближений корней многочленов различных степеней.

Список литературы:

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. —М.: Наука. Физматлит, 1998.— 288 с.
2. Уокер Р. Дж. Алгебраические кривые, пер. с англ. А. И. Узков.— 3-е изд.— М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.— 240 с.
3. Чеботарев Н.Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики / //«Исаак Ньютон».— АН СССР, 1943.— С. 99—126.

ПРОИЗВОДНЫЕ ТОЖДЕСТВА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Коновалова Иоанна
10 класс, СУНЦ НГУ, г. Новосибирск

Научный руководитель: д.ф.-м.н, зав. лабораторией теории колец
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Павел Сергеевич Колесников

Пусть A — ассоциативная алгебра, $T: A \to A$ — линейное отображение. Рассмотрим пространство A как алгебру с двумя новыми билинейными операциями «умножения», обозначаемыми «$<$» и «$>$», заданными по правилу

$T(u)v = u > v$ $uT(v) = u < v$ для любых u, v из A.

Утверждение 1. Для любых x, y, z из A выполнено тождество

$$x > (y < z) = (x > y) < z.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — любое формальное выражение, которое получается из переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ при помощи операций $<$, $>$, + и умножения на скаляр. Значение этого формального выражения можно вычислить на любом векторном пространстве V с заданными операциями $<,>$. Если $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ для любых $v_1, \dots, v_n$ из V, то f называется $<,>$ - *тождеством* на V.

Назовем L-тождеством такое формальное выражение $f(x_1, \dots, x_n)$, которое является $<,>$ - тождеством на любой ассоциативной алгебре A для операций $<,>$, заданных по приведенному выше правилу при помощи любого линейного отображения T.

Теорема. *Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — L-тождество, то $f(x_1, \dots, x_n)$ является следствием тождеств билинейности операций $<,>$ и тождества* (L).

Другими словами, тождество (L) — единственное общее ограничение на операции <,> полученные при помощи линейных отображений на ассоциативных алгебрах.

РАСПОЗНАВАНИЕ КЛЕТОЧНЫХ ФИГУР ПО СПЕКТРУ

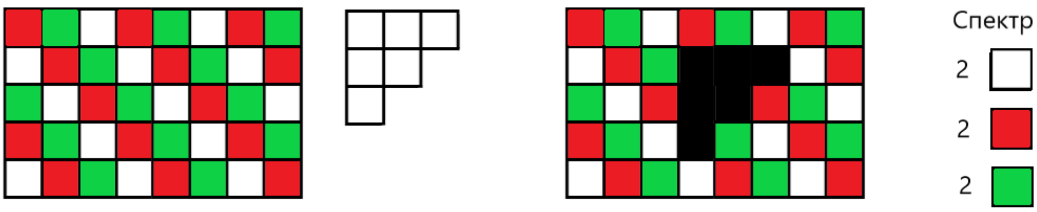
Митев Роман

9 класс, Школа имени маршала В.И. Чуйкова на юго-востоке, г. Москва

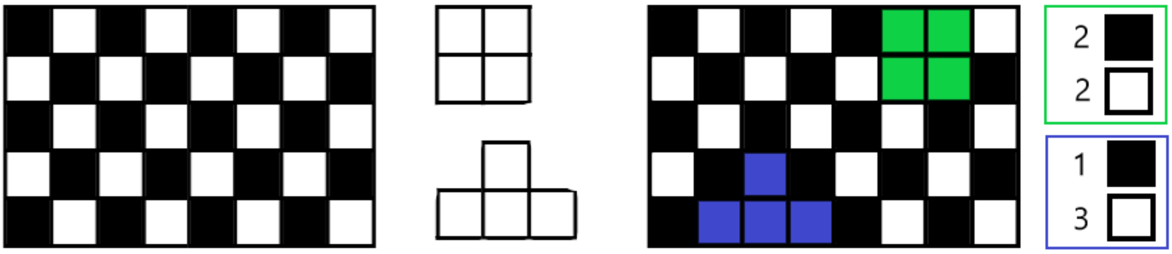
Научный руководитель: к.ф.-м.н., асс. кафедры алгебры и фундаментальной информатики Уральского федерального университета им. первого президента России Б.Н. Ельцина, Александр Леонидович Попович

Работа посвящена изучению раскрасок клеточной плоскости и опознаванию клеточных фигурок по тем цветам, которые они занимают на плоскости. Точные определения будут даны ниже. Раскраска клеточной плоскости — это классическая конструкция, часто возникающая в разных задачах, связанных с замощениями плоскости какими-либо фигурами или разрезаниями фигур [1]. Наши определения обобщают часто встречающиеся рассуждения при решении многих таких задач.

Пусть клеточная плоскость раскрашена в n цветов, то есть каждой клетке сопоставлен конкретный цвет из заданного конечного множества из n цветов. Пусть дана некая фигура из клеток. Положим её на плоскость и выпишем множество цветов занятых клеток с учётом кратности. Полученное множество цветов назовем *спектром* фигуры.



Будем говорить, что раскраска распознает две фигуры, если при любом их размещении на плоскости их спектры различны. Грубо говоря, если нам сообщат только спектры первой и второй фигур, мы всегда можем определить, какая фигура была первой, а какая второй. Во многих задачах, как олимпиадных, так и исследовательских, требуется строить раскраски, распознающие конкретные пары фигур [2]. Поэтому рассмотрение данного понятия актуально.



Заметим, что слова «размещение фигуры» требуют уточнений. Естественно рассматривать три варианта, как можно трактовать эти слова:

- фигуру можно поворачивать, переворачивать и переносить по плоскости параллельными переносами;
- фигуру можно только поворачивать и переносить параллельными переносами;
- допустимы лишь параллельные переносы, без поворотов и переворотов.

Имея неограниченное количество цветов, нетрудно для любых двух фигур построить раскраску, которая распознает их. Наложив ограничение на число цветов, мы получим довольно трудную проблему.

Проблема. Существует ли такое n, что любые две фигуры распознаются некоторой раскраской в n цветов?

Поставленная проблема слишком сложна, чтобы решить её полностью, однако нами получен частичный ответ:

Теорема 1. Пусть при размещении фигуру можно поворачивать, переворачивать и переносить параллельными переносами. Тогда существуют две фигуры, которые не распознаются никакой раскраской в шесть цветов.

Теорема 2. Пусть при размещении фигуру можно поворачивать и переносить параллельными переносами. Тогда существуют две фигуры, которые не распознаются никакой раскраской в три цвета.

Теорема 3. Пусть при размещении фигуру можно только переносить параллельными переносами. Тогда существуют две фигуры, которые не распознаются никакой раскраской в два цвета.

Список литературы:

[1] Д. Кузнецов. О методе раскраски на примере одной задачи. Квант, 2015 №3, с. 25-27.

[2] А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2008. – 96с.

О ТРАПЕЦИИ И ДЕЛЬТОИДЕ

Морозова Анна

10 класс, МБОУ СОШ №1, с. Измалково, Липецкая область

Научный руководитель: учитель математики МБОУ СОШ №1 с. Измалково
Галина Васильевна Шамрина

В ряду учебных дисциплин, составляющих школьный курс математики, геометрия играет особо важную роль. Эта роль определяется и относительной сложностью геометрии, и большим значением этого предмета для изучения окружающего мира.

Актуальность исследования: геометрия является одним из самых сложных предметов, изучаемых в школе, поэтому многие учащиеся плохо усваивают учебный материал. Геометрия как учебный предмет нуждается в привнесении в неё интересных и занимательных задач.

Цель работы: установить связь между длинами сторон и величинами углов равнобедренной трапеции и дельтоида, образованного биссектрисами углов данной трапеции.

Задачи исследования: изучить теоретический материал по теме исследования; найти величины углов дельтоида; вычислить длины сторон дельтоида; вычислить периметр и площадь дельтоида.

Гипотеза исследования: если известны размеры трапеции, то можно установить зависимость между ними и длинами сторон и величинами углов дельтоида, образованного биссектрисами углов трапеции.

Методы исследования: сбор, анализ и обобщение информации; решение задач; сопоставление имеющихся в наличии материалов. В нашем исследовании все задачи про трапецию и дельтоид мы придумали и доказали сами.

Проведя необходимые доказательства, мы пришли к нижеизложенным выводам и получили следующие результаты:

1. *Биссектрисы углов равнобедренной трапеции образуют дельтоид.*
2. *Мы нашли величины углов дельтоида.*
3. *Вывели формулы для вычисления длин сторон дельтоида, его периметра и площади.*
4. *Написали программу для выполнения расчётов на языке программирования Pascal.*

Список литературы:

1. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы (с решениями). Геометрия /.—9-е изд., перераб. и доп. —М.: Издательский дом ОНИКС: Альянс-В, Новая Волна, 1999.— 512 с.
2. Фарков А.В. Школьные математические олимпиады. 5—11 классы. — М.: ВАКО, 2014.— 240с. – (Мастерская учителя математики).

ГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ПОВОРОТАМИ СМЕЖНЫХ ГРАНЕЙ КУБИКА РУБИКА

Нечаев Егор

11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент СУНЦ МГУ, Владимир Натанович Дубровский

В работе исследована группа, порожденная поворотами двух смежных граней кубика Рубика с помощью исследования связанных с ней групп движения отдельных элементов двух граней — угловых и рёберных кубиков. Рассмотрением порождающих элементов доказано, что группа перестановок рёберных кубиков изоморфна S_7. Группа поворотов средних кубиков тривиальна, группа поворотов угловых кубиков изоморфна $\mathbb{Z}_3^5$.

Группа перестановок угловых кубиков изоморфна S_5. Для доказательства этого факта рассмотрены взаимные расположения пар кубиков (*классы*, всего 15). В каждой паре в начальном положении один кубик находится в «верхнем» ряду, другой под ним в «нижнем». Доказано, что 5 взаимных расположений пар невозможны. Для всех возможных взаимных расположений доказано, что внутри него некоторые перестановки пар также невозможны — из 48 возможных перестановок и ориентирований пар достижимы только 12.

В каждом классе выделено 2 подкласса, доказано, что из подклассов можно выбрать по одному элементу так, что они будут образовывать группу, изоморфную F_5, а подкласс, в который входит нейтральная перестановка (подкласс 0+), образует группу, изоморфную $\mathbb{Z}_6$. Из того, что для элемента b какого-либо подкласса и элементаaподкласса 0 элементab принадлежит тому же подклассу, что и b, следует, что каждый элемент группы перестановок угловых кубиков представим единственным образом в виде hk, где $h \in G_0$ — элемент группы подкласса 0+, $k \in G_F$ — элемент группы, изоморфнойF_5.

Доказано, что

$$S_5 = \{hk | h \in \mathbb{Z}_6, k \in F_5\}.$$

Получено полное описание группы:

$$\mathbb{Z}_6^5 \times ((A_5 \times A_7) \times \mathbb{Z}_2).$$

ДОПОЛНЕНИЕ К СПИСКУ ВЕРНИКА

Федоренко Екатерина

9 класс, Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Физико-математический лицей» города Сергиев Посад.

Научный руководитель: старший научный сотрудник, начальник лаборатории 12 ЦННИ МО РФ, Забавин Валерий Николаевич

В 1982 году Уильям Верник составил список задач на восстановление треугольника по трём точкам из следующих шестнадцати [1]: A, B, C, O — вершины треугольника и центр описанной окружности; M_a, M_b, M_c, G — середины сторон треугольника и центр масс; H_a, H_b, H_c, H — основания высот треугольника и ортоцентр; T_a, T_b, T_c, I — основания биссектрис треугольника и центр вписанной окружности. Построения должны быть выполнены при помощи циркуля и линейки.

К настоящему времени все задачи решены (т.е. либо указан способ построения треугольника, либо доказано, что построение невозможно) [2]. Решения задач, где построение возможно, приведены в [3].

Обращает на себя внимание отсутствие в списке центров вневписанных окружностей

(I_a,I_b,I_c). Их добавление в несколько раз увеличит количество задач, поэтому ограничимся точками: A, B, C, I, I_a, I_b, I_c.

Цель работы — решить задачи на построение треугольника по трём точкам из набора A, B, C, I, I_a, I_b, I_c (указать способ построение или доказать, что это невозможно).

Принципиально разные задачи: ABC, ABI, ABI_a, ABI_c, AIIa, AII_b, AI_aI_b, AI_bI_c, II_aI_b, $I_aI_bI_c$. Первые две присутствуют в списке Верника, поэтому мы их не рассматриваем.

Вывод. Решены все задачи на построение треугольника по трём точкам из набора A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, дополняющего список Верника. Установлены необходимые и достаточные условия существования искомого треугольника (в виде требования к взаимному расположению точек). В четырех задачах он единственный, в четырех — их бесконечно много. Указаны способы построения треугольника. Во всех рассмотренных задачах построение возможно.

Список литературы:

1. Wernick W. Triangle Constructions with Three Located Points. — Math. Mag., 55 (1982), 227–230.
2. http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/wernick/
3. Беляев С.А. Восстановление треугольника по трем точкам// Математическое просвещение. Третья серия, вып. 19. — М.: МЦНМО, 2015. С. 109—137.

Оглавление

Отпечатано 15 апреля 2019 года.

Издательский центр СУНЦ МГУ,

г. Москва, ул. Кременчугская, д.11, 107-Б.