

Третий тур олимпиады для 9-10 классов

За работу начислялся дополнительный балл, если работа была в одном файле. Ещё один дополнительный балл начислялся, если все решения, включая формулы, таблицы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре).

Задача 1

Как известно, запись числа в большинстве позиционных системах счисления определяется *базисом* и набором *цифр*, которые могут использоваться в каждом из разрядов (в некоторых системах счисления в каждом из разрядов используется свой набор цифр). При каких условиях последовательность из положительных чисел может являться базисом системы счисления, в которой можно представить любое целое неотрицательное число, и какие цифры при этом должны быть в каждом из разрядов? В каком случае каждое целое неотрицательное число в такой системе будет представлено единственным образом?

Решение

Последовательность может являться базисом, если эта последовательность начинается с 1 (иначе не получится представить число 1) и быть возрастающей, при этом каждое число должно быть представимо, тогда в каждом следующем элемент последовательности должен быть не больше $N_{i-1} * P_{i-1}$, где N_{i-1} — это количество различных цифр в предыдущем разряде, а P_{i-1} — предыдущий элемент последовательности.

Для однозначности должно соблюдаться следующее условие $\frac{P_{k+1}}{P_k} = N_k$.

Критерии

5 баллов ставилось за решение только для однозначно представимых.

3 балла ставилось за отсутствие систем счисления отличных от Р-ичных.

Также снималось от 1 до 3 баллов за неточности в доказательствах (или их отсутствие).

Задача 2

Пусть у нас имеется Объектов весом 1, 2, 3, ..., Nграммов каждый. У нас есть весы с двумя чашами, с их помощью можно определять, равны ли массы грузов, лежащих на двух чашах, а если не равны — то на какой чаше лежит более легкий груз. Опишите, как должен быть устроен минимальный набор гирек (их массы также должны быть целыми числами), используя которые можно определить любую возможную целочисленную массу от 1 до N грамм. Для определения одной массы можно производить любое число взвешиваний, можно использовать все или только часть набора гирек, может класть гирьки на разные чашки весов и т. д.

Например, если требуется определить целочисленную массу от 1 до 5 грамм, то достаточно две гирьки. Подойдёт, например, набор из гирек массами 3 и 4. Массы 3, 4, 5 можно определить при помощи взвешиваний $x = 3$, $x = 4$ и $x > 4$. Массу 1 грамм можно определить при помощи равенства $x + 3 = 4$ (на одну чашу кладётся предмет и гирька в 3

грамма, на другую чашу – гирька в 4 грамма). Массу в 2 грамма можно определить, например, по условию $x < 3$ (на одну чашу весов кладётся предмет, на другую – гирька в 3 грамма), а также проверив при помощи описанного выше способа, что $x \neq 1$.

Решение

Формальная постановка задачи: даётся один предмет массой в пределах от 1 до N , массу которого надо найти минимальным возможным количеством гирек с известными массами (их массы мы должны предложить сами). Заметим, что для каждой гири есть 3 возможных комбинации: лежит на левой чаше, лежит на правой чаше, не лежит на весах. Также для определения массы тела нам достаточно либо ровно найти его массу, либо знать, что он расположен между двумя вариантами с разницей в 2 грамма. Из этого мы получаем оценку на количество гирек

$$\log_3 N$$

Массы гирек получаются по следующей формуле:

$$m_i = 3^{i-1} * 2$$

Например, для $N = 9$ достаточно двух гирек массами 2 и 6, для 27 достаточно 3 гирек массами 2, 6 и 18.

Критерии

2 балла ставилось за верное решение имеющее сложность отличную от $\log_3 N$

4 балла ставилось за правильную оценку с доказательством. И ещё 2 балла ставилось за пример.

Могли быть сняты до 2 баллов за неточности.

Задача 3

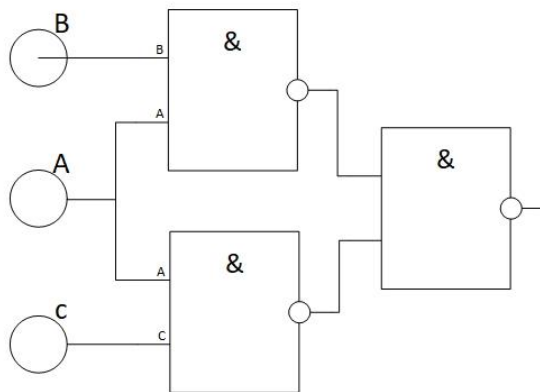
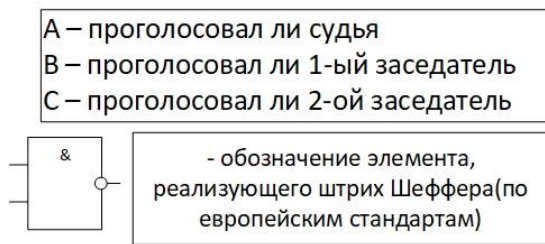
В голосовании принимали участие судья и два присяжных заседателя. Решение считается принятым, если за него проголосовали все трое или судья и один из заседателей. Постройте любым способом минимальную логическую формулу для определения результатов голосования. Для реализации электронного устройства данного голосования имеются только логические элементы, соответствующие операции штрих Шеффера (notand). Нарисуйте комбинационную схему, реализующую данное устройство. Постарайтесь обойтись минимальным количеством имеющихся логических элементов.

Решение

Формула

$$(A|B1)|(A|B2)$$

Схема



Критерии

При правильном решении (таблица истинности совпадала с ответом) балл ставился по следующей формуле:

$$\text{Баллы} = \max(5 - |3 - \text{количество использованных операций}|, 2) + (1 \text{ балл за объяснение})$$

При использовании операций отличных от штриха Шеффера ставилось 0 баллов.

При отсутствии комбинационной схемы вычиталось 2 балла от набранных (не ниже 0).

Правильность ваших функций проверялась с помощью программы:

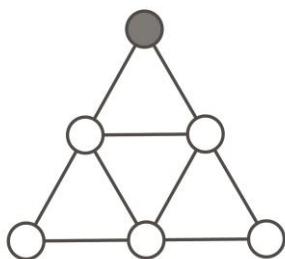
```
defnn(a, b):
    return not (a and b)

ans = True

for a in False, True:
    for q1 in False, True:
        for q2 in False, True:
            z = #Вашафункция
            if a and (q1 or q2) != z:
                ans = False
            print(a, q1, q2)
        if ans:
            print('OK')
        else:
            print('(((((')
```

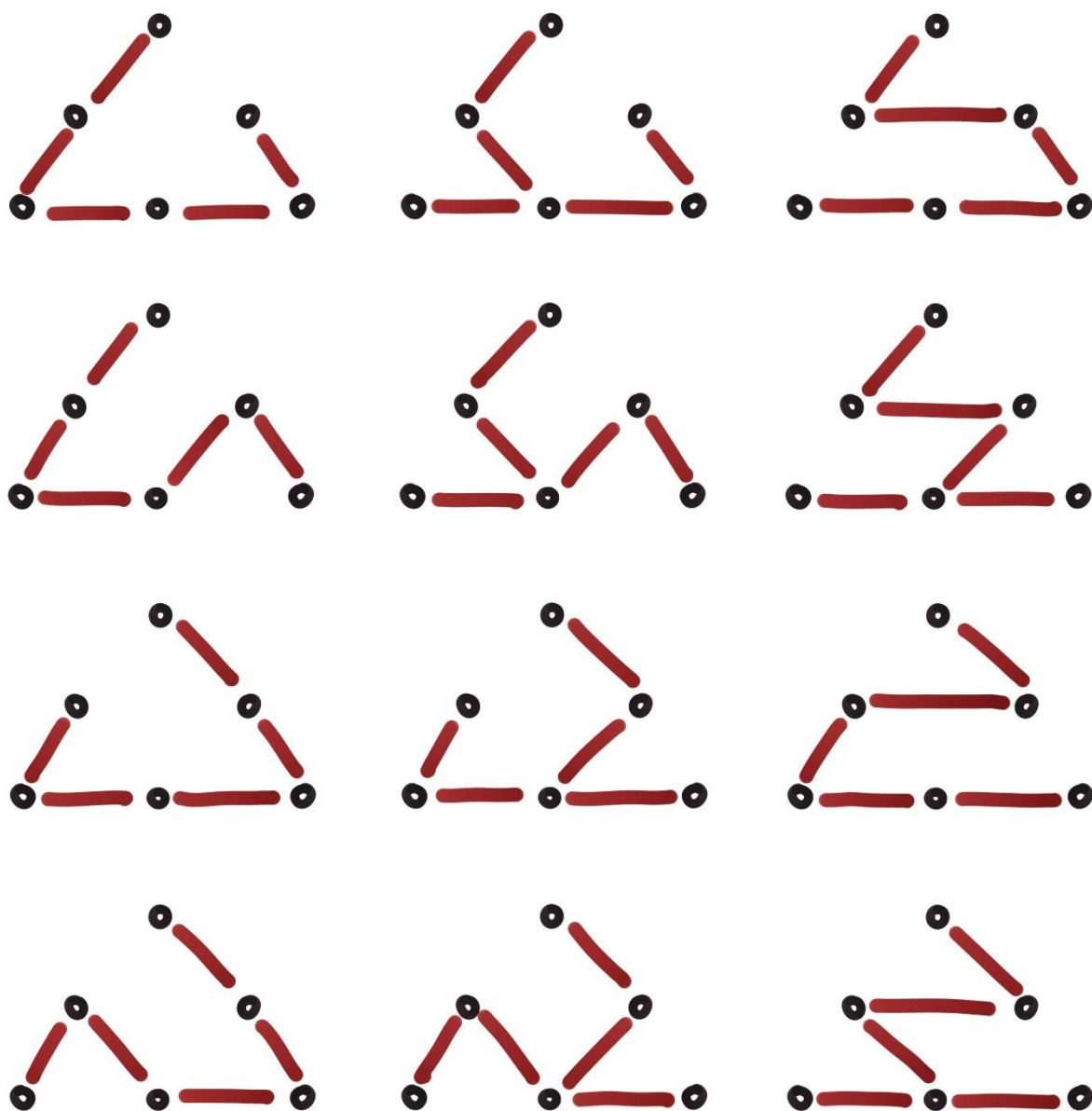
Задача 4

Сколько различных *деревьев обхода в глубину* получится для показанного ниже графа? Обход всегда должен начинаться из помеченной вершины. Деревья считаются различными, если у них различное множество ребер. Ответ обоснуйте.



Решение

Занумеруем вершины слева направо и сверху вниз. Заметим, что начало всегда в 1. По обходу у нас всегда будет только одно ребро из рёбер 12 и 13. Рассмотрим случай с ребром 12. Из него возможны рёбра 23, 24 и 25. И так далее. Всего 12 различных вариантов.



Критерии

3 балла за обход в глубину (в том числе с учётом построения не по рёбрам, а по вершинам).

4 балла, если обход останавливался в любой момент.

6 баллов за полное решение с объяснением.

Могли быть сняты до 2 баллов за неточности или отсутствие примера (можно было занумеровать рёбра и перечислить все возможные множества).

Задача 5

Пусть F -композицией числа n называется разложение этого числа на положительные слагаемые, каждое из которых является числом Фибоначчи.

Пусть $f(n)$ – количество слагаемых во всех возможных F -композициях числа n . Например, $f(3) = 8$, потому что $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$, и $3 + 2 + 2 + 1 = 8$ слагаемых во всех разложениях суммарно.

Найдите $f(10)$. Ответ обоснуйте.

Решение

Можно было решить с помощью программы. Например:

```
fib = [1, 2, 3, 5, 8]
ans = 0
def rec(n, last = []):
    global fib
    global ans
    for i in fib:
        if i <= n:
            last.append(i)
            rec(n - i, last)
    last.pop()
    if n == 0:
        ans += len(last)
    print(last)

rec(10)
print(ans)
```

Критерии

1 балл за ответ в диапазоне от 2000 до 2100 (либо за умные мысли, этот балл нельзя апеллировать)

2 балла за ответ 2017 или 2019.

4 балла за правильный ответ + 2 балла за пояснение.