

# 3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

## Математика

9 класс

1. На доске написан квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Каждую минуту трёхчлен  $f(x)$ , записанный к этому моменту на доске, стирают, а вместо него записывают трёхчлен

$$\frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}.$$

Докажите, что через некоторое время на доске появится квадратный трёхчлен, не имеющий корней.

2. Существует ли натуральное число, квадрат которого начинается ровно с 2019 девяток?
3. На столе лежит 100 куч камней. Два игрока делают ходы по очереди. За один ход разрешается взять со стола произвольное ненулевое число камней так, чтобы ход затрагивал не более чем 99 куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для любого начального положения камней укажите, кто выигрывает — начинающий или его противник.
4. В треугольнике  $ABC$  с тупым углом  $B$  проведены биссектрисы угла  $BAC$  и биссектриса внешнего угла при вершине  $A$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Расстояния от точки  $O$  до обеих биссектрис, а также до прямой  $BC$ , равны. Найдите  $\angle ABC$ .
5. В школе 80 первоклашек. Один из них — Петя — разбил окно, а другой — Вася — это видел. Директор знает, что кто-то из первоклашек разбил окно, а кто-то другой из первоклашек это видел, но не знает, кто именно. Директор может раз в день вызвать для беседы к себе в кабинет одного или нескольких первоклашек. Если в кабинете окажется Вася в тот момент, когда там нет Пети, то он расскажет, что окно разбил Петя. Если Вася окажется в кабинете вместе с Петей, то он будет молчать. Может ли директор понять, кто разбил окно, не более чем за 12 дней?