

Третий тур олимпиады для 9-10 классов по информатике

Предпочтительная форма оформления работы – создание одного файла с решениями всех заданий, которые вы выполните (в том числе можно создать один файл из рукописных сканов работ). В этом случае за работу **начисляется один дополнительный балл**. Если, дополнительно, все решения, включая формулы, таблицы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), то **начисляется еще один балл**.

Каждое задание само по себе вне зависимости от способа оформления оценивается из 6 баллов. В том числе баллы снимаются за недостаточную строгость обоснования даже при наличии правильного ответа. В некоторых задачах в качестве обоснования можно использовать текст компьютерной программы.

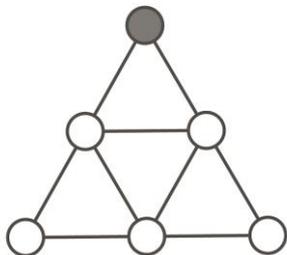
1. Как известно, запись числа в большинстве позиционных системах счисления определяется *базисом* и набором *цифр*, которые могут использоваться в каждом из разрядов (в некоторых системах счисления в каждом из разрядов используется свой набор цифр). При каких условиях последовательность из положительных чисел может являться базисом системы счисления, в которой можно представить любое целое неотрицательное число, и какие цифры при этом должны быть в каждом из разрядов? В каком случае каждое целое неотрицательное число в такой системе будет представлено единственным образом?

2. Пусть у нас имеется N объектов весом 1, 2, 3, ..., N граммов каждый. У нас есть весы с двумя чашами, с их помощью можно определять, равны ли массы грузов, лежащих на двух чашах, а если не равны – то на какой чаше лежит более легкий груз. Опишите, как должен быть устроен минимальный набор гирек (их массы также должны быть целыми числами), используя которые можно определить любую возможную целочисленную массу от 1 до N грамм. Для определения одной массы можно производить любое число взвешиваний, можно использовать все или только часть набора гирек, может класть гирьки на разные чашки весов и т. д.

Например, если требуется определить целочисленную массу от 1 до 5 грамм, то достаточно две гирьки. Подойдет, например, набор из гирек массами 3 и 4. Массы 3, 4, 5 можно определить при помощи взвешиваний $x = 3$, $x = 4$ и $x > 4$. Массу 1 грамм можно определить при помощи равенства $x + 3 = 4$ (на одну чашу кладется предмет и гирька в 3 грамма, на другую чашу – гирька в 4 грамма). Массу в 2 грамма можно определить, например, по условию $x < 3$ (на одну чашу весов кладется предмет, на другую – гирька в 3 грамма), а также проверив при помощи описанного выше способа, что $x \neq 1$.

3. В голосовании принимали участие судья и два присяжных заседателя. Решение считается принятым, если за него проголосовали все трое или судья и один из заседателей. Постройте любым способом минимальную логическую формулу для определения результатов голосования. Для реализации электронного устройства данного голосования имеются только логические элементы, соответствующие операции штрих Шеффера (not and). Нарисуйте комбинационную схему, реализующую данное устройство. Постарайтесь обойтись минимальным количеством имеющихся логических элементов.

4. Сколько различных *деревьев обхода в глубину* получится для показанного ниже графа? Обход всегда должен начинаться из помеченной вершины. Деревья считаются различными, если у них различное множество ребер. Ответ обоснуйте.



5. Пусть F -композицией числа n называется разложение этого числа на положительные слагаемые, каждое из которых является числом Фибоначчи.

Пусть $f(n)$ – количество слагаемых во всех возможных F -композициях числа n . Например, $f(3) = 8$, потому что $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$, и $3 + 2 + 2 + 1 = 8$ слагаемых во всех разложениях суммарно.

Найдите $f(10)$. Ответ обоснуйте.