Задача №1

В одной из моделей расширяющейся Вселенной радиус Вселенной имеет скорость изменения, которая зависит от времени t и текущего значения $r(t)$ по формуле $v(t) = v_0 \frac{R^2}{r^2(t)}(1 - \frac{t}{t_0})$, где t – время, отсчитываемое от настоящего момента времени, когда радиус Вселенной равен R. Найдите время, через которое произойдет коллапс (сжатие в точку) в такой модели Вселенной, считая R, v_0 и t_0 известными.

Примечание: Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, площадь поверхности сферы $S = 4\pi r^2$.

Решение

Малое изменение объема шара

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r,$$

где Δr–малое изменение радиуса шара.

Скорость изменения радиуса Вселенной

$$v(t) = \frac{\Delta r}{\Delta t} = v_0 \frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

Выражая Δrиз второго уравнения, находим, что скорость изменения объема линейна по времени

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4\pi v_0 R^2 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

Таким образом, начальная величина скорости изменения объема Вселенной $u_0 = 4\pi v_0 R^2$, а ускорение, с которым меняется скорость, отрицательно и по модулю равно $w = \frac{4\pi v_0 R^2}{t_0}$. Тогда закон изменения объема Вселенной имеет вид

$$V(t) = V_0 + u_0 t - \frac{wt^2}{2},$$

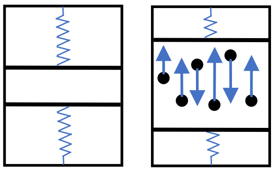
где $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Во время коллапса объем будет равен 0, тогда, решение уравнение $V(t_к) = 0$,

$$t_к = t_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2R}{3v_0 t_0}}\right)$$

Ответ

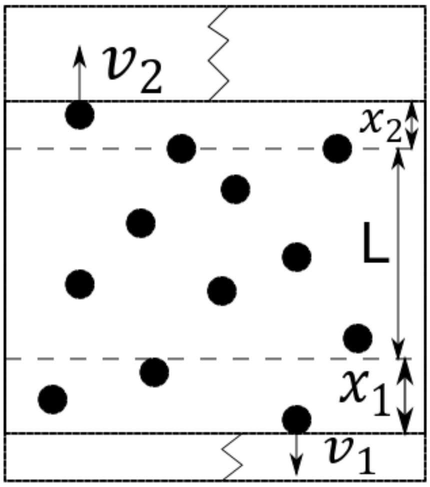
$$t_к = t_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2R}{3v_0 t_0}}\right)$$

Задача №2



В вертикальном сосуде между двумя невесомыми поршнями прыгают $N \gg 1$шариков массой m с одинаковой полной энергией. Поршни с помощью одинаковых пружин жесткости k прикреплены к основаниям сосуда. Под действием шариков объем между поршнями удвоился. Найдите время, которое проходит между последовательными ударами одного шарикаоб один и тот же поршень, считая, что шарики упруго ударяются о каждый поршень и не сталкиваются между собой. Считайте, что шарики ударяются о поршни практически мгновенно. Ускорение свободного падения g.

Решение



Запишем закон изменения импульса при соударении одного шарика о каждый из поршней

$$mv_1 - (-mv_1) = f_1\Delta t^*,$$

$$mv_2 - (-mv_2) = f_2\Delta t^*,$$

где v_1 и v_2 – скорости шарика перед столкновением с нижним и верхним поршнем соответственно, а f_1и f_2– средние силы, действующие на шарик со стороны нижнего и верхнего поршня соответственно (здесь мы пренебрегаем силой тяжести, действующей на каждый из шариков, т.к. время соударения мало).

Время движения шарика от одного поршня к другому в поле тяжести равно $\Delta t_1 = \frac{v_1 - v_2}{g}$, а время между двумя последовательными ударами шарика об один и тот же поршень тогда равно $\Delta t = 2\Delta t_1 = 2\frac{v_1-v_2}{g}$.

Средняя за время Δtсила, действующая на нижний и верхний поршень равна $F_1 = Nf_1$ и $F_2 = Nf_2$ соответственно. Поршни удерживают в равновесии пружины, которые действуют с силами kx_1 и kx_2, где x_1и x_2– величины деформаций пружин. Окончательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2Nmv_1 = kx_1\Delta t \\ 2Nmv_2 = kx_2\Delta t \\ x_1 + x_2 = L \\ 2L = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \\ \Delta t = \dfrac{2(v_1 - v_2)}{g} \end{cases},$$

где 3-е уравнение отражает тот факт, что объем удвоился, а 4-е уравнение описывает равноускоренное перемещение одного шарика в поле тяжести. Решая систему уравнений, получим

$$\Delta t = 4\sqrt{\frac{Nm}{k}}.$$

Ответ

$$\Delta t = 4\sqrt{\frac{Nm}{k}}$$

Задача №3

Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части так, что в одной из них температура газа, а также количества вещества в два раза больше, чем в другой. В разных частях сосуда находится один и тот же газ. Найдите установившееся давление в сосуде после того, как перегородку уберут. Давление в части сосуда, где меньше количества вещества равно P.

Решение

Уравнение состояния для газа с давлением P:

$$PV = \nu RT.$$

Т.к. система теплоизолирована, а работа не совершается, то внутренняя энергия всего газа сохраняется:

$$c_V \nu T + c_V 2\nu 2T = c_V 3\nu T_x.$$

Уравнение состояния всего газа после установления теплового равновесия

$$P_x 2V = 3\nu R T_x.$$

Окончательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} PV = \nu RT \\ P_x 2V = 3\nu R T_x \\ c_V \nu T + c_V 2\nu 2T = c_V 3\nu T_x \end{cases},$$

решая, получим ответ:

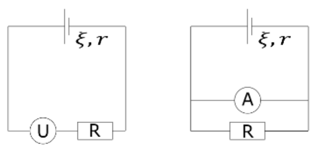
$$P_x = \frac{5}{2}P.$$

Ответ

$$P_x = \frac{5}{2}P.$$

Задача №4

Показания вольтметра U и амперметра I таковы, что $U/I = 2R$. При этом $R_A = R/10$, $R_V = 10R$. Найдите отношение внутреннего сопротивления источника к R.



Решение

Сила тока, текущего в левой цепи, равна

$$I_1 = \frac{U}{R_V},$$

тогда, для всей цепи имеем:

$$\xi = I_1(r + R_V + R) = \frac{U(r + R_V + R)}{R_V}.$$

Ток, текущий через амперметр во второй цепи, равен I, тогда, ток, текущий через резистор R, равен

$$I_R = \frac{IR_A}{R},$$

А полный ток во второй цепи тогда равен

$$I_2 = I_A + I_R = I\frac{R + R_A}{R}.$$

Тогда для второй цепи имеем:

$$\xi = I_2\left(r + \frac{RR_A}{R + R_A}\right) = I\frac{r(R + R_A) + RR_A}{R}.$$

Окончательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{U}{I} = 2R \\ \xi = \frac{U(r + R_V + R)}{R_V} \\ \xi = I\frac{r(R + R_A) + RR_A}{R} \end{cases}.$$

Решая, получим:

$$r = \frac{7}{3}R.$$

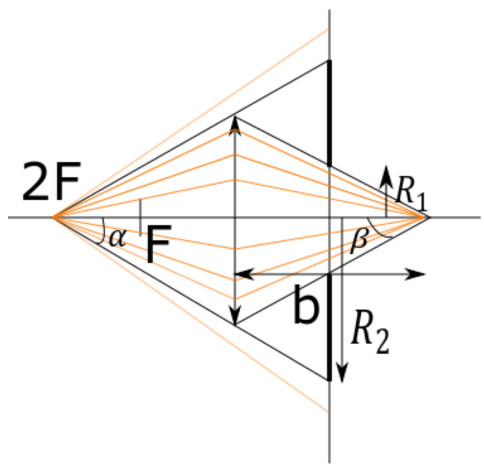
Ответ

$$\frac{r}{R} = \frac{7}{3}.$$

Задача №5

На оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F на расстоянии $2F$ от её оптического центра расположен точечный источник света. За линзой на расстоянии F расположен экран. Найдите площадь тени на экране в такой системе, если диаметр линзы равен $2F$.

Решение



В отсутствии экрана изображение получается на расстоянии b:

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

или, $b = 2F$.Вообще говоря, данная формула справедлива только в приближении параксиальной оптики (для малых углов отклонения лучей от главной оптической оси), однако, будем в пределах данной задачи считать, что приближения параксиальной оптики справедливы.

Найдем $\tan\alpha$ и $\tan\beta$ углов, указанных на рисунке:

$$\tan\alpha = \frac{F}{2F} = \frac{1}{2},$$

$$\tan\beta = \frac{F}{2F} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\tan\alpha = \frac{R_2}{3F} \to R_2 = 3F\tan\alpha = \frac{3}{2}F,$$

$$\tan\beta = \frac{R_1}{F} \to R_1 = F\tan\beta = \frac{1}{2}F.$$

Тень представляет собой круг радиуса R_2 с вырезанным по центру кругом радиуса R_1, тогда площадь тени равна $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 2\pi F^2$.

Ответ

$$S = 2\pi F^2$$