Олимпиада по прикладной математике (ПриМат)
Старшая лига. 30.10.2018

1. Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды (в ньютонах) определяется формулой $F = 10^{-3}v^2$, где v(м/с) — значение модуля скорости шарика. Вычислите приближённо, за какое время шарик пройдет свой первый сантиметр и свой первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

Решение Предположим, что на первом сантиметре пути сила сопротивления не существенна. Действительно, если бы её совсем не было, то шарик приобрёл бы скорость $V = \sqrt{2gh} \approx 0,45$ м/с (через h обозначен 1 сантиметр). При такой скорости сила сопротивления составляет $F = 2 \cdot 10^{-4}$ Н, что в 500 раз меньше силы тяжести. Таким образом, пользуясь формулой для скорости тела при свободном падении, получаем приближённо время, за которое шарик пролетит первый сантиметр $t = \sqrt{2h/g} \approx 0,045$ с.

С увеличением скорости растет сила сопротивления движению. Существует скорость V_t, с которой шарик может двигаться равномерно. Найдем ее:

$$mg = F \Rightarrow V_t = 10 \text{ м/с}.$$

Такой скорости свободно падающее тело достигнет за одну секунду. То есть, за одну секунду тело разгоняется почти до скорости V_t , и затем движется практически равномерно. Двигаясь со скоростью V_t, шарик пройдет один километр за 100 секунд. Видно, что время разгона много меньше этой величины. Таким образом, 100 секунд можно считать ответом.

Ответ: 0,045 с; 100 с.

2. Два туриста захотели приготовить себе чай. Для этого они набрали 1 л чистой ключевой воды температурой $0°C$ и 1 л грязной воды из сточной трубы химического комбината, имеющей температуру $100°C$. Первый из туристов сообщил, что по второму началу термодинамики (согласно которому, тепло от холодного тела к горячему не передаётся) они смогут нагреть 1 л холодной воды максимум до температуры $50°C$. Второй же турист усомнился в правильности этого вывода. А Вы могли бы в таких условиях, используя дополнительные ёмкости, получить 1 л чистой воды температурой более $50°C$? Какой наибольшей температуры Вы можете достичь?

Решение Покажем, что температуры выше $50°C$ достижимы. Предложим конкретный вариант. Разделим 1 л горячей воды на две части по 0,5 л. Сначла нагреем холоднуую воду с помощью одной из них. По уравнению баланса тепла получим, что установится равновесная температура $33,(3)°C$.

Затем приведём оставшуюся часть горячей воды в тепловой контакт с холодной водой.

Из уравнения теплового баланса:

$$\frac{100}{3} \cdot 1 + 100 \cdot \frac{1}{2} = T\frac{3}{2},$$

и окончательная температура составляет $55,(5)°C$.

Развивая эту идею, можно получить более высокие температуры. Разделим горячую воду на n равных частей и будем их последовательно приводить в тепловой контакт с водой. После взаимодействия с первой порцией горячей воды, температура холодной воды станет

$$t_1 = \frac{100}{n+1},$$

далее имеет место рекуррентное соотношение:

$$t_{k+1} = \frac{100}{n+1} + t_k\frac{n}{n+1}$$

После взаимодействия с n-ой порцией холодной воды

$$T(n) = t_n = \tfrac{100}{n+1} + t_{n-1}\tfrac{n}{n+1} = \tfrac{100}{n+1} + \tfrac{100}{n+1}\tfrac{n}{n+1} + t_{n-2}\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^2 =$$
$$= \tfrac{100}{n+1}\left[1 + \tfrac{n}{n+1} + \ldots + \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n-1}\right] = 100\left[1 - \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^n\right]$$

При увеличении n выражение в квадратных скобках имеет конечный предел, равный $1 - 1/e$, где $e \approx 2.78$ — основание натуральных логарифмов. Оценка для температуры при этом составляет $64°C$.

Но можно получить еще более высокую температуру, если разбить на части обе жидкости. Оказывается, это позволяет нагреть холодную воду до температуры, сколь угодно близкой к 100 градусам! (Конечно, если пренебречь потерями тепла.) Подробнее читайте в журнале "Квант"№4 за 1996 г. (http://kvant.ras.ru/1996/04/sogrevayushchie_formuly.htm)

Ответ: Возможно нагреть чистую воду сколь угодно близко к $100°$.

3. В тёплый весенний день, когда на улице было $20°C$, Гаврила увидел в кондитерской пирожное, на котором было указано, что срок годности при температуре $4°C$ составляет 72 ч, а при температуре $10°C$ — 48 ч. Покупая пирожное, Гаврила выяснил, что с момента его изготовления прошло 25 ч и все это время оно хранилось при температуре $10°C$. Купив пирожное, Гаврила забыл его в сумке и вспомнил об этом только через 12 ч, причём всё это время пирожное хранилось при уличной температуре. Безопасно ли будет после этого съесть пирожное, если оно портится, как только число бактерий в нём достигает определенного критического уровня, а размножение бактерий происходит в определённом темпе (количестве их делений в минуту), линейно зависящем от температуры? Начальный уровень бактерий контролируется на производстве.

Решение. Темпы размножения (k —число делений в единицу времени) линейно зависят от температуры: $k = a\theta + b$, θ — температура. Пирожное портится, если произойдёт определённое число делений N, то есть срок годности $T(\theta)$ находится из соотношения $N = kT = (a\theta + b)T$, то есть

$$T = \frac{N}{a\theta + b} = \frac{1}{\alpha\theta + \beta}.$$

Неизвестные константы найдём из условия задачи:

$$\alpha = \frac{T_1 - T_2}{T_2 T_1(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{1}{72 \cdot 12} \quad \beta = \frac{T_2\theta_2 - T_1\theta_1}{T_2 T_1(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{1}{108}.$$

При $\theta = 20°$ срок годности составляет 216/7 часа. Таким образом, пирожное до съедения проведёт

$$\frac{25}{48} + \frac{12 \cdot 7}{216} < 1$$

Следовательно, пирожное есть безопасно.

Ответ Да.