2 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

9 класс

1. Натуральное число N больше 10^{10}, и притом делится на 99. Какая наименьшая сумма цифр у него может быть?

Ответ. 18.

Решение. Из условия следует, что N делится на 9 и на 11. Пусть S_1 — его сумма цифр на нечётных местах, S_2 — сумма цифр на чётных местах, $S = S_1 + S_2$ — его общая сумма цифр. Воспользовавшись признаками делимости на 9 и на 11, получаем, что $S = S_1 + S_2$ делится на 9 (поэтому она или 9, или хотя бы 18), а $S_1 - S_2$ делится на 11. Но если бы $S_1 + S_2$ было равно 9, то $S_1 - S_2$ не делилось бы на 11 (все возможные варианты $9-0, 8-1, 7-2, \ldots, 1-8, 0-9$ не делятся на 11). Поэтому $S \geqslant 18$.

Значение $S = 18$ достигается, например, при $N = 9000\ldots0009$ (10 нулей). Очевидно, что такое N делится и на 9, и на 11.

2. Петя и Вася бежали по одинаковому маршруту. Петя бежал первую треть маршрута со скоростью 5 км/ч, а остальную часть — со скоростью 15 км/ч. Вася же бежал первую половину маршрута со скоростью 6 км/ч, а вторую — со скоростью 12 км/ч. В итоге Вася на свою пробежку потратил на $N\%$ больше времени, чем Петя. Найдите $4N$.

Ответ. 50.

Решение. Пусть длина маршрута составляла S км. Тогда Петя бежал $\frac{S/3}{5} + \frac{2S/3}{15} = \frac{S}{9}$ часов, а Вася бежал $\frac{S/2}{6} + \frac{S/2}{12} = \frac{S}{8}$ часов. Т.к. $\frac{S}{8} / \frac{S}{9} = \frac{9}{8} = 1,125$, то $\frac{S}{8}$ больше $\frac{S}{9}$ на $12,5\%$. Значит, $N = 12,5$, откуда $4N = 50$.

3. В шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны имеют длину 1, а все углы равны $120°$. Точка X на прямой AB такова, что $\angle XDE = 45°$. Сколько градусов составляет угол AXF?

Ответ. 75.

Решение. Треугольник BCD — равнобедренный с углом при вершине $120°$, поэтому $\angle CDB = \angle CBD = 30°$ (по аналогичной причине и $\angle FBA = 30°$). Следовательно, $\angle BDE = \angle DBE = 120° - 30° = 90°$, а $\angle BDX = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Поскольку в треугольнике DBX выполнено $\angle DBX = 90^\circ$ и $\angle BDX = 45^\circ$, то этот треугольник — равнобедренный, и $BD = BX$ (отсюда следует, что X лежит на продолжении AB за точку A). Но $BD = BF$ (из очевидного равенства треугольников BCD и BAF), поэтому $BX = BF$. Следовательно, треугольник XBF — равнобедренный с углом 30° при вершине B, поэтому $\angle AXF = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

4. Каково наименьшее возможное значение выражения

$$9a^2 - 12ab + 6a + 5b^2 - 14b + 32,$$

если a и b — действительные числа?

Ответ. 6.

Решение. Заметим, что значение выражения

$$9a^2 - 12ab + 6a + 5b^2 - 14b + 32 = (b-5)^2 + (3a - 2b + 1)^2 + 6$$

не меньше 6, т.к. каждый из квадратов — число неотрицательное. При этом значение 6 достигается, когда каждый квадрат равен 0 — это возможно при $a = 3$ и $b = 5$.

5. У Пети в руках стандартная колода из 36 игральных карт (четыре шестёрки, четыре семёрки, ... , четыре туза). Сколькими способами он может выбрать из неё четыре карты, любые две из которых разной масти и разного достоинства?

Ответ. 3024.

Решение. Первой Петя может выбрать любую из 36 карт. Тогда в качестве следующей он уже не сможет выбрать 3 карты того же достоинства и 8 карт той же масти, что и первая выбранная карта. Поэтому выбрать вторую карту он сможет $36 - 1 - 3 - 8 = 24$ способами. Выбрать третью карту по аналогии он сможет 14 способами, а последнюю — всего 6 способами. Перемножив эти 4 числа и поделив полученное произведение на 4! (неважно, какая из карт была выбрана первой, какая — второй, и т.д.), получаем ответ $\frac{36 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 6}{4!} = 3024$.

6. Натуральное число N назовём *красивым*, если сумма квадратов любых N простых чисел, больших 3, всегда делится на N. Найдите наибольшее красивое число.

Ответ. 24.

Решение. Любое простое число, большее 3, можно представить либо в виде $6n+1$, либо в виде $6n-1$. Заметим, что $(6n \pm 1)^2 = 36n^2 \pm 12n + 1 = 24n^2 + 12n(n \pm 1) + 1$. Заметим, что первые два слагаемых последней суммы делятся на 24 (так как произведение $n(n \pm 1)$ четно). Поэтому квадрат любого простого числа, большего 3, дает при делении на 24 остаток 1. Поэтому сумма 24 таких квадратов всегда делится на 24. С другой стороны, если в наборе из n простых чисел есть пятерка, и мы заменим ее семеркой, сумма квадратов этих чисел увеличится на 24. Поэтому все искомые n должны быть делителями числа 24, откуда и вытекает ответ.