Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Младшая лига. 30.10.2018

1. Известно, что если взять два одинаковых кубика и на каждую из их 12 граней нанести специальным образом по одной цифре, то, прикладывая эти кубики друг к другу, можно составить из них любую потенциальную дату месяца: $01, 02, \dots, 30, 31$ (рис. 1). Дед Мороз, готовя новогодние подарки, решил использовать эту идею для сувенирных настольных календарей, но так, чтобы каждый из них содержал свою индивидуальную пару кубиков. Сколькими способами можно изготовить такую пару при соблюдении трёх правил:

   а) кубики в данной паре равноправны;
   б) конкретное расположеие цифры на данной грани не имеет значения;
   в) любые распределения данной шестёрки цифр по граням одного кубика считаются одинаковыми?

2. В кабинете у профессора Преображенского висели часы с маятником, которые после появления Шарикова стали почему-то отставать на 2 ч в сутки. Профессор вспомнил, что период колебаний маятника пропорционален корню квадратному из его длины, и укоротил маятник на 1 см. После этого часы стали отставать лишь на 1 ч в сутки. На сколько сантиметров ему нужно укоротить этот маятник ещё, чтобы часы пошли точно?

3. Циферблат часов фиксированного диаметра собираются покрыть серебром и золотом в соответствии с каким-либо из рисунков 1, 2, 3, 4, на которых белый цвет — серебро, а другой — золото. Какой из четырёх предложенных дизайнов циферблата окажется более экономным, если золото дороже серебра?

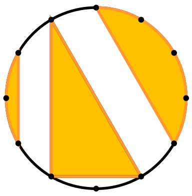


Рис. 1

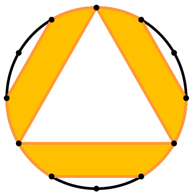


Рис. 2

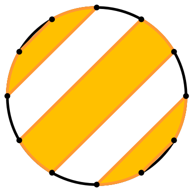


Рис. 3

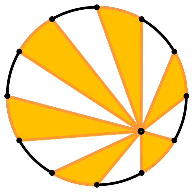


Рис. 4

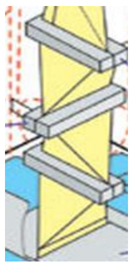
Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Старшая лига. 30.10.2018

1. Известно, что если взять два одинаковых кубика и на каждую из их 12 граней нанести специальным образом по одной цифре, то, прикладывая эти кубики друг к другу, можно составить из них любую потенциальную дату месяца: $01, 02, \dots, 30, 31$ (рис. 1). Дед Мороз, готовя новогодние подарки, решил использовать эту идею для сувенирных настольных календарей, но так, чтобы каждый из них содержал свою индивидуальную пару кубиков. Сколькими способами можно изготовить такую пару при соблюдении трёх правил:

   а) кубики в данной паре равноправны;
   б) конкретное расположение цифры на данной грани не имеет значения;
   в) распределения данной шестёрки цифр по граням одного кубика считаются одинаковыми, если они совмещаются поворотами кубика?

2. Давно замечено, что год жизни для маленького ребенка длится целую вечность, а для пожилого человека пролетает почти мгновенно. Это объясняется тем, что когда человек уже прожил время t, ему кажется, что он прожил некоторое время $x(t)$ (искажённое в его сознании). При этом малый интервал Δt истинного времени воспринимается им не абсолютно, а как кажущийся ему интервал Δx (также искажённый), который в $x(t)$ раз короче истинного (отсюда и следует, что чем больше величина $x(t)$, тем меньше кажется ему этот интервал). Какой при этом может быть функция $x(t)$?

3. Около 70 лет назад шведская фирма TetraPak изобрела оригинальную упаковку для молока в форме треугольной пирамиды (тетраэдра). Её преимуществом является простота изготовления: полоса из специального картона склеивается в трубу, её наполняют молоком, пережимают в двух чередующихся перпендикулярных направлениях и склеивают по образовавшимся ребрам (жёсткости), затем её сдвигают на один пакет вниз и процесс повторяется, а в конце полученная гирлянда из пакетов разрезается по этим ребрам. Однако такие пакеты было не очень удобно транспортировать, и для них был придуман специальный шестиугольный контейнер: его дно имеет вид шестиугольной пирамиды, на грани которой кладется первый слой пакетов, а в зазоры между ними — второй слой, образующий вверху шестигранную выемку, в которую и укладывается последний слой. Какой ширины надо взять полосу картона, чтобы пакеты получались объемом $V = 0{,}5$ л?



Решения всех задач

Задача 1, обе лиги.

Ответ: 10 (младшая лига), 9000 (старшая лига).

Решение. Прежде всего, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках любой пары (из-за необходимости образовывать даты 11 и 22), да и цифра 0 — тоже, так как на одном кубике её иметь недостаточно (ведь она ассоциируется со всеми 9-ю остальными цифрами, которых на одном кубике помещается только 6). Далее, на 6 мест, оставшиеся в общей сложности на двух кубиках, имеется 7 кандидатов: 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Значит, по-честному требование задачи выполнить нельзя. Но если пойти на хитрость и ***отождествить*** цифры 6 и 9 (так как на гранях кубика они выглядят одинаково, да и повороты цифр, по условию, разрешены) — то всё-таки можно. Теперь достаточно разбить 6 цифр на неупорядоченные пары неупорядоченных троек, что делается $C_6^3\,/2 = 10$ способами — это ответ на вопрос задачи для младшей лиги.

Наконец, если учитывать расположение цифр на гранях кубика с точностью до его поворотов, то можно зафиксировать одну цифру данной шестерки и грань, где она расположена, и тогда на противоположной грани кубика может стоять любая из 5 оставшихся цифр. Если же фиксировать ещё и какую-либо из оставшихся цифр вместе с её гранью, то остальные три цифры распределяются по оставшимся трём граням $3! = 6$ способами. Поэтому получаем $5 \cdot 6 = 30$ способов расположения данных шести цифр на гранях кубика, а значит, ответ на вопрос задачи для старшей лиги — $10 \cdot 30 \cdot 30 = 9000$ способов.

Задача 2, младшая лига.

Ответ: $\frac{5687}{6480} = 0{,}87\ldots$ см.

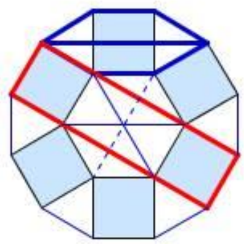
Решение. Из сообщённого свойства вытекает, что длина маятника (в см) пропорциональна квадрату периода маятника, а значит, обратно пропорциональна квадрату скорости часов (в ч/сут). Отсюда, обозначив последнюю длину маятника через l и искомую величину её будущего укорочения через x, с помощью так называемой ***производной пропорции*** получаем

$$\frac{l+1}{\frac{1}{22^2}} = \frac{l}{\frac{1}{23^2}} = \frac{l-x}{\frac{1}{24^2}} (\Longrightarrow) = \frac{(l+1)-l}{\frac{1}{22^2}-\frac{1}{23^2}} = \frac{l-(l-x)}{\frac{1}{23^2}-\frac{1}{24^2}} \Longrightarrow x = \frac{\frac{1}{23^2}-\frac{1}{24^2}}{\frac{1}{22^2}-\frac{1}{23^2}} = \frac{22^2(24^2-23^2)}{24^2(23^2-22^2)} = \frac{11^2\cdot 47}{12^2\cdot 45} = \frac{5687}{6480} = 0{,}87\ldots \text{ см.}$$

Задача 3, младшая лига.

Ответ: всё одинаково.

Решение. На первом циферблате золотые области складываются в полукруг. На втором циферблате достаточно рассмотреть любой из трёх естественных секторов в 120° и в нём передвинуть серебряный сегмент к краю дуги, после чего золотая область разобьётся на те же части, что и серебряная. Третий циферблат специальным образом разрезается на части (см. рис.), а после их хитроумной перестановки становится хорошо видно, что золотые и серебряные области состоят из одинаковых кусочков. На четвёртом циферблате сумма площадей пар противоположных золотых треугольников не зависит от расположения их общей вершины внутри круга, следовательно, эту вершину можно смело перенести в центр круга, а тогда золотые части превратятся в секторы круга и займут ровно половину его площади.



Задача 2, старшая лига.

Ответ: $x(t) = \sqrt{2t}$.

Решение. Из условия имеем уравнение $\Delta x = \Delta t / x(t)$, из которого (переходом к пределу) получаем

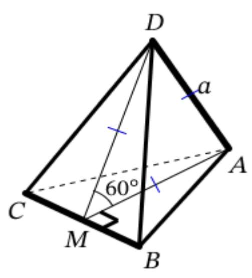
$$t'(x) = x \Leftrightarrow t(x) = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow x(t) = \sqrt{2(t-C)},$$

где по смыслу величины $x(t)$ имеем $x(0) = 0$, откуда $C = 0$.

Задача 3, старшая лига.

Ответ: $20 \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = 30{,}26\ldots$ см.

Решение. Из способа формирования пакета следует, что его грани — одинаковые равнобедренные треугольники. Рассматривая верхний слой упаковки, видим, что сумма шести двугранных углов при ребре жесткости равна 360°. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ такой формы (см. рис.): пусть в нем $AD = BC = a$ (т.е. ширина картона равна $2a$) и M — середина BC. Угол при ребре BC равен 60°, следовательно, AMD — равносторонний треугольник, а ребро BC перпендикулярно плоскости AMD, поэтому объём тетраэдра $ABCD$ равен



$$0{,}5 \cdot 10^3 = V = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{AMD} \cdot MB = \frac{a^3}{4\sqrt{3}} \Longrightarrow 2a = 20 \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = 30{,}26\ldots \text{ см.}$$

Замечание. Реальная ситуация оказывается более сложной: способ изготовления пакета оставляет небольшую свободу в выборе двугранного угла при ребре жесткости. Мы взяли этот угол равным 60°, исходя из расположения пакетов в верхнем слое упаковки. Но можно подсчитать, что если сделать такие пирамиды жесткими, то заполнить ими весь объём контейнера без пустот не получится. Однако «невязка» будет очень небольшой, и на практике она компенсируется тем, что оболочка пакета изгибается.