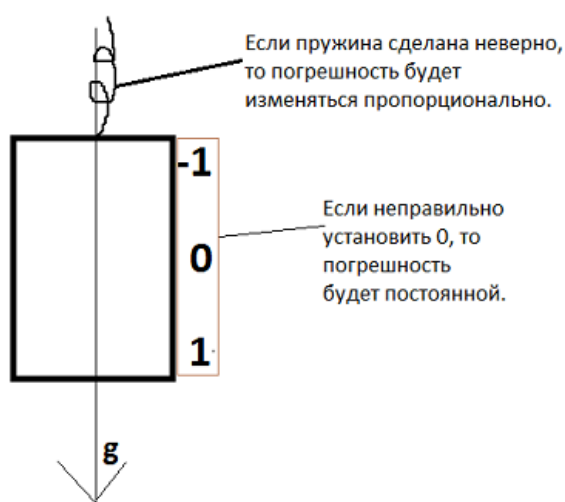


Аннотация

В статье изложено получение формул вычисления ожидаемых показаний реальных (имеющих дефекты) акселерометров при заданном положении их корпуса и формул расчета показаний при заданном местоположении акселерометров.

Процесс работы

Сначала мы нарисовали рисунок на основании данных из файла 1D_g.xls



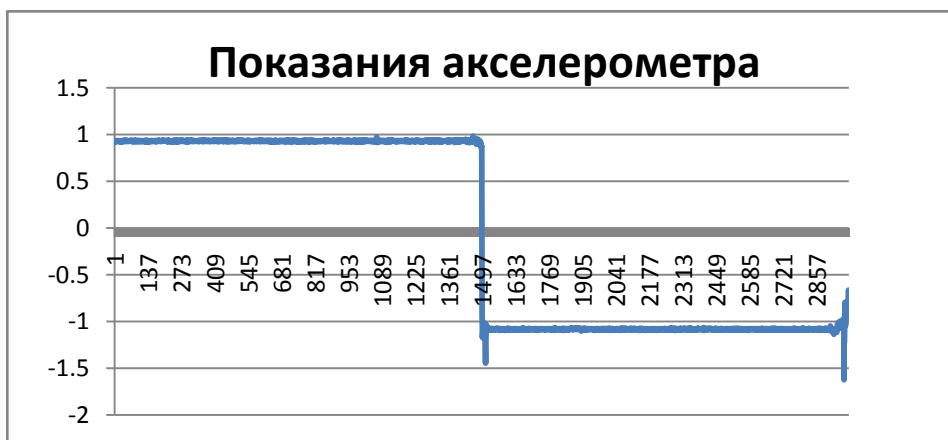
Проанализировав рисунок мы вывели, что итоговая погрешность может зависеть от сдвига системы отсчета (b) и от коэффициента погрешности измерений (k). При этом сдвиг системы отсчета вызывает сдвиг всех показаний на определенную величину, а коэффициент погрешности влияет пропорционально (подобное упоминалось в условии задачи). В итоге получили, что реальные показания акселерометра (X) равны $kx + b$, где x -теоретические показания (без погрешностей).

Далее проанализировав файл 1D_f.xls мы заметили небольшой разброс значений (δ), который, предположительно, возникает из-за внешних факторов, и решили добавить это отклонение в формулу: $X=kx+b\pm\delta$.

Для того чтобы посчитать этот разброс мы использовали формулу среднеквадратичного отклонения (формула описана в книге «Лабораторный практикум по общей физике, том 1, механика» автор А. Д. Гладун):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_{cp} - x_i)^2}$$
, где n – количество входных данных, x_{cp} – среднее значение по всем данным, x_i – данное значение.

Построив график на основе данных из файла 1D_f.xls мы определили 2 интервала (когда проекция вектора g на ось корпуса акселерометра равна 1 и когда -1) для которых посчитали σ . При этом среднеквадратичное отклонение мы считали на интервалах без учета краев, так как они содержат много артефактных (сильно выбивающихся из графика) точек (скорее всего, потому что эти значения были получены в момент переворота акселерометра).



В итоге мы получили, что $\sigma=0,006683$, когда проекция $g=1$ и $\sigma=0,012284$, когда проекция $g=-1$. Однако мы не проводили подобные вычисления при разборе других случаев, так как σ влияет только на итоговый результат и не влияет на другие вычисления.

Параллельно мы вычислили сдвиг системы отсчета (b). Мы составили систему уравнений для 2 интервалов (интервалы при проекции $g=1$ и при проекции $g=-1$).

$$\begin{cases} kx_1 + b = x_{cp1} & (x_1 = 1) \\ kx_2 + b = x_{cp2} & (x_2 = -1) \end{cases} \implies \text{сложив формулы, получаем } b = \frac{x_{cp1} + x_{cp2}}{2}$$

Среднее арифметическое первого интервала $0,930700255$ и среднее значение второго $-1,081450567$, следовательно, $b = \frac{0,930700255 + (-1,081450567)}{2} = -0,075375156$.

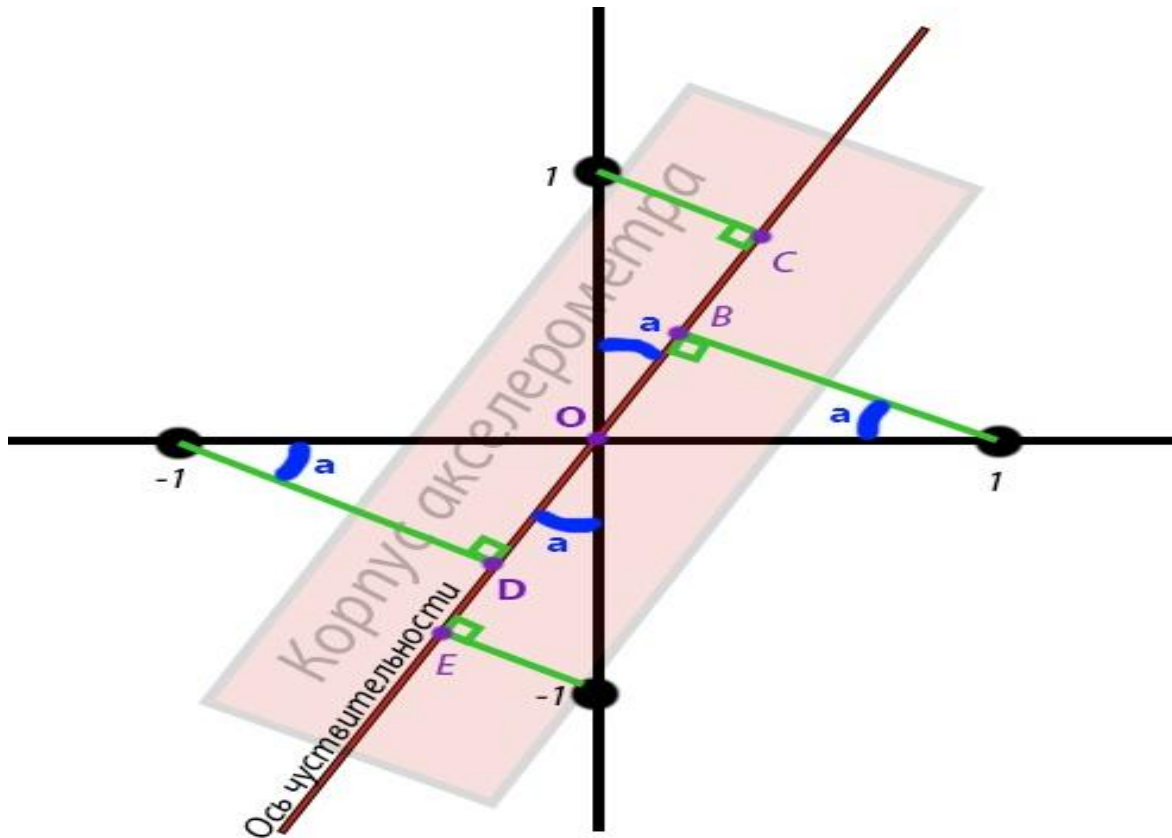
Также мы вычислили коэффициента погрешности измерений (k).

$$kx + b = x_{cp} \implies k = \frac{b - x_{cp}}{x} = \frac{-0,075375156 - 0,930700255}{1} = -1,006075411$$

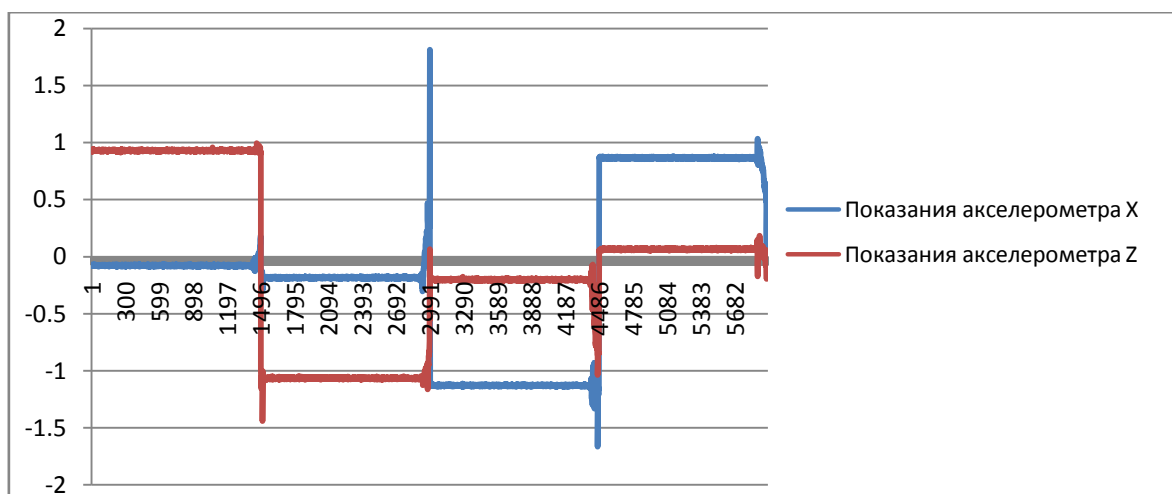
Подставив все получившиеся значения в формулу $kx + b \pm \delta = X$ мы получили итоговую формулу для первого случая:

$1,006075411 * g + (-0,075375156) \pm 0,012284 = X$, где g - проекция вектора g на ось X корпуса акселерометра, а X ожидаемые показания реального акселерометра.

Для разбора второго случая мы сначала нарисовали рисунок



И построили график по данным из файла 2D_f.xls



Затем мы разбили график на 4 интервала, аналогично с прошлым графиком. То есть интервалы значений при $(g_{z1}=1; g_{x1}=0)$, $(g_{z2} = -1; g_{x2}=0)$, $(g_{x3}= -1; g_{z3}=0)$, $(g_{x4}=1; g_{z4}=0)$ и обозначили их индексами 1,2,3,4. При этом отсекая концы, включающие артефактные точки.

На основе графика и рисунка мы получили по 4 формулы для X и для Z:

$$\begin{aligned} \cos \alpha * k + b &= Z_1 & \cos \alpha * k + b &= X_1 \\ -\cos \alpha * k + b &= Z_2 & -\cos \alpha * k + b &= X_2 \\ -\sin \alpha * k + b &= Z_3 & -\sin \alpha * k + b &= X_3 \\ \sin \alpha * k + b &= Z_4 & \sin \alpha * k + b &= X_4 \end{aligned}$$

Аналогично с прошлым решением находим b_x и b_z

$$b_z = -0,06645, b_x = -0,13025.$$

Далее находим k_x и k_z :

$$\cos \alpha * k + b = x_{cp4}$$

$$\sin \alpha * k + b = x_{cp1}$$

Пусть $x_{cp4} - b = A$, $x_{cp1} - b = B$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{A}{k}, \text{ следовательно } \cos^2 \alpha = \frac{A^2}{k^2}, \text{ значит } 1 - \sin^2 \alpha = \frac{A^2}{k^2}$$

$$\text{Аналогично } \sin^2 \alpha = \frac{B^2}{k^2};$$

Подставляем одно уравнение в другое и получаем $1 - \frac{B^2}{k^2} = \frac{A^2}{k^2}$, следовательно

$$k^2 = A^2 + B^2 \quad \longrightarrow \quad k = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

Подставив A и B получим, что $k_x = \pm 0,99928$, $k_z = \pm 1,006025$. Исходя из логики, можно сказать, что k всегда положительный, так как в противном случае отрицательный коэффициент «переворачивал бы» акселерометр. Но на всякий случай мы это доказали:

Опираясь на тригонометрический круг можно получить, что для Z $\cos \alpha > 0$, а для X

$$\sin \alpha > 0, \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{A}{k} \\ \sin \alpha = \frac{B}{k} \end{cases} \longrightarrow \text{ctg } \alpha = \frac{A}{B}, \text{ отсюда, если } \frac{A}{B} > 0, \text{ то } \alpha \text{ во 2 четверти}$$

тригонометрического круга или в 4 четверти, в противном случае в 1 или в 3 четверти. Зная знак при cos или sin и четверть, мы можем определить знак при коэффициенте.

$\text{ctg } \alpha_z = 7,508659$; $\text{ctg } \alpha_x = 0,053307$ и при этом $\cos \alpha_z > 0$, $\sin \alpha_x > 0$ откуда следует, что $k_z > 0$, $k_x > 0$. То есть $k_z = 1,006025$, а $k_x = 0,99928$.

Дальше мы нашли $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для X и Z:

$$\begin{cases} \cos \alpha_z * k_z + b = z_{cp4} \\ \sin \alpha_z * k_z + b = z_{cp1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cos \alpha_z = 0,991248 \\ \sin \alpha_z = 0,132014 \end{cases}$$

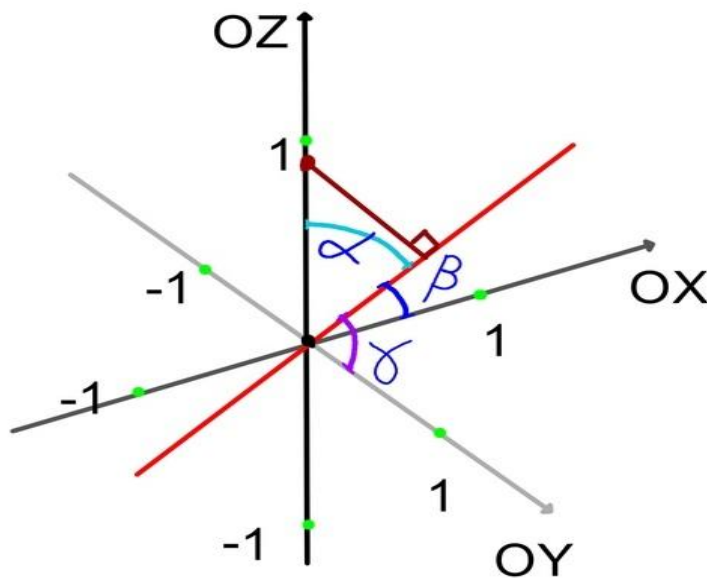
$$\begin{cases} \cos \alpha_x * k_x + b = x_{cp4} \\ \sin \alpha_x * k_x + b = x_{cp1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cos \alpha_x = 0,053231 \\ \sin \alpha_x = 0,998582 \end{cases}$$

Подставив все значения в формулы мы получили:

$g * 1,006025 + (-0,06645) = Z$; где g - проекция вектора g на ось Z корпуса акселерометра, а Z ожидаемые показания реального акселерометра.

$g * 0,99928 + (-0,13025) = X$, где g - проекция вектора g на ось X корпуса акселерометра, а X ожидаемые показания реального акселерометра.

Третий случай мы тоже начали разбирать с рисунка:

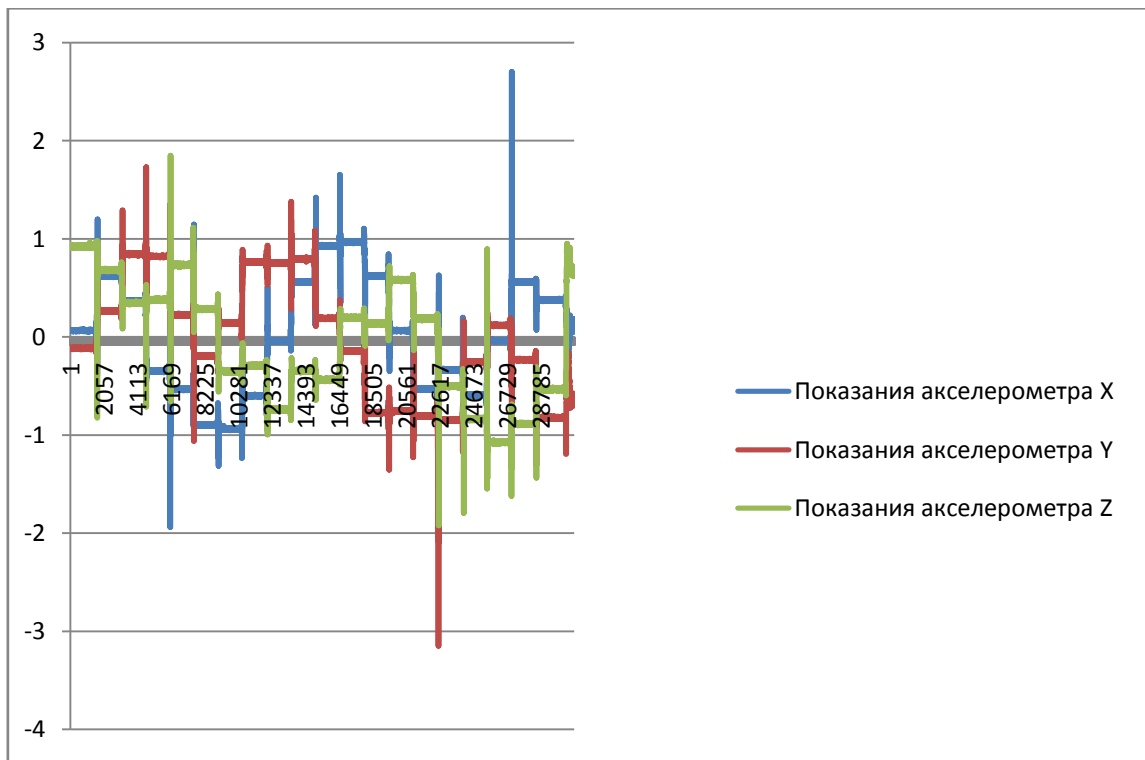


Насколько мы поняли, показания одного акселерометра есть сумма проекций всех векторов на его ось. Обозначим углы между акселерометром и осями X, Y, Z как XAz, YAz, ZAz для акселерометра Z , аналогично XAy, YAy, ZAy и XAx, YAx, ZAx .

В файле 3D_g.xls вектор g разложен по X, Y, Z . Проекции данных значений на акселерометр равны $g_x * \cos XAx, g_y * \cos YAx, g_z * \cos ZAx$ для акселерометра X . Аналогично для других акселерометров. Итого, добавив погрешности k и b описанные выше получаем:

$$x_{cp1} = k(\cos XAx * g_{x1} + \cos YAx * g_{y1} + \cos ZAx * g_{z1}) + b;$$

Построим график на основе файла 3D_f.xls:



Затем мы разбили график на 20 интервалов, аналогично с прошлыми графиками, при этом отсекая концы, включающие артефактные точки. Далее мы посчитали средние значения для каждого интервала по X, Y, Z.

	x	y	z
1	0,066042	-0,1152	0,922359
2	0,618819	0,264591	0,682592
3	0,362628	0,845068	0,346359
4	-0,35014	0,821529	0,37814
5	-0,53228	0,226212	0,73295
6	-0,8986	-0,19506	0,285057
7	-0,93856	0,139114	-0,34503
8	-0,59941	0,766764	-0,29343
9	-0,03965	0,752043	-0,73974
10	0,559168	0,79837	-0,34419
11	0,922371	0,199774	-0,43498
12	0,965076	-0,14356	0,196795
13	0,621975	-0,77176	0,13801
14	0,065291	-0,75701	0,581743
15	-0,52844	-0,80348	0,188778
16	-0,33561	-0,84459	-0,50032
17	-0,59086	-0,25691	-0,83657
18	-0,03623	0,118938	-1,07141
19	0,561984	-0,2314	-0,88581
20	0,37511	-0,82712	-0,52893

Проекция вектора g на ось X корпуса акселерометра А	Проекция вектора g на ось Y корпуса акселерометра В	Проекция вектора g на ось Z корпуса акселерометра С		
0	0	1	1	
0,577350269	0,333333333	0,745355992	2	
0,35682209	0,872677996	0,333333333	3	
-0,35682209	0,872677996	0,333333333	4	
-0,577350269	0,333333333	0,745355992	5	
-0,934172359	-0,127322004	0,333333333	6	
-0,934172359	0,127322004	-0,333333333	7	
-0,577350269	0,745355992	-0,333333333	8	
0	0,666666667	-0,745355992	9	
0,577350269	0,745355992	-0,333333333	10	
0,934172359	0,127322004	-0,333333333	11	
0,934172359	-0,127322004	0,333333333	12	
0,577350269	-0,745355992	0,333333333	13	
0	-0,666666667	0,745355992	14	
-0,577350269	-0,745355992	0,333333333	15	
-0,35682209	-0,872677996	-0,333333333	16	
-0,577350269	-0,333333333	-0,745355992	17	
0	0	-1	18	
0,577350269	-0,333333333	-0,745355992	19	
0,35682209	-0,872677996	-0,333333333	20	

Приводим таблицу данных, к которой обращаемся через a,b,c с индексом.

Аналогично с прошлыми задачами мы посчитали b_x , b_y и b_z

Пусть $b=b_x$, тогда

$$\text{Cos } ZAx^*k=x_1-b$$

$$\text{Cos } YAx^*k=(x_9-b-c_9(x_2-b))/b_{10}$$

$$\text{Cos } XAx^*k=(x_{11}+x_{12}-2b)/2a_{11}$$

$$k=\sqrt{(x_1 - b)^2 + ((x_9 - b - c_9(x_2 - b))/b_{10})^2 + (x_{11} + x_{12} - 2b)/2a_{11}^2}$$

$$k=0,995719$$

$$\text{Cos } ZAx=(x_1-b)/k$$

$$\text{Cos } YAx=((x_9-b-c_9(x_2-b))/b_{10})/k$$

$$\text{Cos } XAx=((x_{11}+x_{12}-2b)/2a_{11})/k$$

Аналогично производим операции для Y и Z и получаем таблицы данных.

x	
Cos(Xax)*k	0,99427
Cos(Yax)*k	-0,01643
Cos(Zax)*k	0,051137
b	0,014904
k	0,995719
Cos(Xax)	0,998544
Cos(Yax)	-0,0165
Cos(Zax)	0,051357

y	
Cos(Xax)*k	0,206068
Cos(Yax)*k	0,662915
Cos(Zax)*k	-0,11707
b	0,001871
k	0,704007
Cos(Xax)	0,292707
Cos(Yax)	0,941632
Cos(Zax)	-0,16629

z	
Cos(Xax)*k	0,133694
Cos(Yax)*k	0,077822
Cos(Zax)*k	0,996887
b	-0,07453
k	1,008818
Cos(Xax)	0,132526
Cos(Yax)	0,077141
Cos(Zax)	0,988173

Итоговая формула:

$X=0,995719 g_x+0,014904$; где g_x - проекция вектора g на ось X корпуса акселерометра, а X ожидаемые показания реального акселерометра.

$Y=0,995719 g_y+ 0,001871$; где g_y - проекция вектора g на ось Y корпуса акселерометра, а Y ожидаемые показания реального акселерометра.

$Z=0,995719 g_z+ (-0,07453)$; где g_z - проекция вектора g на ось Z корпуса акселерометра, а Z ожидаемые показания реального акселерометра.

В итоге мы получили формулы для всех 3 случаев. Подставляя данные положения акселерометра мы можем получить его значения и подставляя его значения получить его положение.