11 класс (2018-19 учебный год).

Занятие 1. Введение в кинематику материальной точки

Часть 2. Примеры решения задач

Рекомендуется первоначально пытаться решать примеры самостоятельно, а потом сравнивать свои решения с рекомендуемыми решениями, которые приведены в конце каждого раздела.

Задачи на равномерное движение

Пример 1. Будет ли равномерным прямолинейное движение, при котором за любую секунду тело проходит ровно один метр?

Пример 2. Найти среднюю скорость пешехода, если (1/N) часть **времени** пешеход двигался со скоростью V_1, а оставшееся время – со скоростью V_2.

Пример 3. Найти среднюю скорость пешехода, если (1/N) часть **пути** пешеход прошел со скоростью V_1, а оставшийся путь – со скоростью V_2.

Пример 4. Две машины движутся равномерно по прямой дороге со скоростями $V_1 = 8$ м/с и $V_2 = 4$ м/с. Когда часы неподвижного наблюдателя показывали 12.00 (20 июня 2015 года), первая машина находилась на расстоянии $L_1 = 210$ м слева от него, а вторая – на расстоянии $L_2 = 70$ м справа. Когда и где машины встретились (или встретятся)? Размерами машин можно пренебречь. Постарайтесь получить общую формулу для всех четырех возможных случаев направлений движения машин.

Пример 5. Катер от пристани А к пристани Б едет 6 часов и столько же обратно. Ежедневно с 6.00 до 15.00 от пристани А катера отходят каждые 30 минут, а от пристани Б – каждые 45 минут. А с 15.00 до 24.00 – наоборот. Сколько катеров насчитает в пути пассажир по дороге из А в Б, если он поедет рейсом, отправляющимся от пристани А в 11.00? Катера, встреченные на пристани, не считаются.

Пример 6. Ровно в 13.00 дядя Федор отправился на электричке из Москвы в Простоквашино. В то же самое время из Простоквашино в Москву на скором поезде отправился кот Матроскин. В 14.00 на промежуточной станции Матроскин увидел дядю Федора и быстро перебежал к нему в электричку. Во сколько они приедут в Простоквашино, если средняя скорость поезда на 20 % больше средней скорости электрички?

Пример 7. Первую треть пути черепаха проползла равномерно за 1 час, вторую треть — тоже равномерно, но за 2 часа, третью — тоже равномерно, но за три часа. Во сколько раз средняя скорость на первой половине пути больше, чем на второй?

Пример 8. Несколько часов автомобиль ехал со скоростью $V_1 = 40$ км/ч, затем ровно $t_2 = 1$ час он простоял в пробке, и далее до конечного пункта он ехал $t_3 = 2$ часа со скоростью $V_3 =$ 60 км/ч. Найдите его среднюю скорость за последние $\tau = 2.5$ часа. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время путешествия. Если Вы не сможете искомую величину найти точно, укажите диапазон ее возможных значений. В любом случае ответ должен быть обоснован.

Решения задач на равномерное движение

Пример 1. Будет ли равномерным прямолинейное движение, при котором за любую секунду тело проходит ровно один метр?

Решение. Не обязательно. Например, полсекунды тело покоится, а затем полсекунды движется со скоростью 2 м/с, потом полсекунды опять покоится, а затем полсекунды опять движется со скоростью 2 м/с и т.д. Тогда для любого момента включения секундомера каждую очередную секунду тело будет проходить один метр, но не каждые очередные полсекунды тело будет проходить одинаковые расстояния. Таким образом, в определении равномерного движения очень важно, что рассматриваемые равные промежутки времени могут быть любыми по величине.

Пример 2. Найти среднюю скорость пешехода, если (1/N) часть **времени** пешеход двигался со скоростью V_1, а оставшееся время – со скоростью V_2.

Решение. Пусть полное время движения пешехода T. Тогда за все это время он пройдет путь $L = V_1 T/N + V_2 T (N – 1)/N$. Здесь первое слагаемое равно пути, пройденному пешеходом со скоростью V_1, а второе слагаемое равно пути, пройденному пешеходом со скоростью V_2. Поэтому средняя скорость пешехода по определению равна: $V_{ср} = L/T = (V_1 + (N – 1) V_2)/N$.

Пример 3. Найти среднюю скорость пешехода, если (1/N) часть **пути** пешеход прошел со скоростью V_1, а оставшийся путь – со скоростью V_2.

Решение. Пусть полный путь пройденный пешеходом S. Тогда полное время движения пешехода $T = S/(N V_1) + S(N – 1)/(N V_2)$. Поэтому его средняя скорость будет равна: $V_{ср} = S/T = NV_1V_2/((N – 1))V_1 + V_2)$.

Пример 4. Две машины движутся равномерно по прямой дороге со скоростями $V_1 = 8$ м/с и $V_2 = 4$ м/с. Когда часы неподвижного наблюдателя показывали 12.00 (20 июня 2015 года), первая машина находилась на расстоянии $L_1 = 210$ м слева от него, а вторая – на расстоянии $L_2 = 70$ м справа. Когда и где машины встретились (или встретятся)? Размерами машин можно пренебречь. Постарайтесь получить общую формулу для всех четырех возможных случаев направлений движения машин.

Решение. Свяжем систему отсчета с Землей, ось Ох направим вдоль дороги слева направо относительно наблюдателя, за ноль на оси Ох возьмем место нахождения наблюдателя, за начала отсчета времени возьмем момент, когда часы наблюдателя показывали 12.00. Тогда, т.к. по условию машины двигаются равномерно, то, пользуясь формулой (3) теоретической части занятия, получим, что координаты машин будут меняться по законам: $x_1(t) = - L_1 + V_{1x}\,t$; $x_2(t) = L_2 + V_{2x}\,t$. Здесь $V_{1x} = V_1$, если первая машина движется в положительном направлении оси Ох, и $V_{1x} = - V_1$, если в отрицательном. Аналогично для второй машины. Момент встречи найдем, приравнивая координаты первой и второй машин: $t_0 = (L_1 + L_2)/(V_{1x} - V_{2x})$. Подставляя найденное время встречи в формулу зависимости от времени координаты первой (или второй) машины, найдем место встречи машин: $x_0 = (L_1V_{2x} + L_2V_{1x})/(V_{1x} - V_{2x})$. Заметим, что если время t_0 получится отрицательным, то это означает, что встреча машин произошла до того, как часы наблюдателя показали 12.00. В этом случае полученный ответ будет иметь физический смысл только в предположении, что характер движения машин до начала наблюдения был таким же, как и после 12.00. Данное предположение обосновано тем, что в условии ничего не сказано про возможность изменения характера движения машин (в условии просто сказано, что «две машины движутся равномерно»). Теперь остается провести расчеты для 4 возможных случаев направлений движения машин: 1) обе машины движутся слева направо по отношению к наблюдателю, т.е. $V_{1x} > 0$, $V_{2x} > 0$: $t_0 = 70$ с, $x_0 = 350$ м; 2) машины движутся навстречу друг другу, причем первая машина едет слева направо, т.е. $V_{1x} > 0$, $V_{2x} < 0$: $t_0 = 70/3 \approx 23{,}3$ с, $x_0 = - 70/3 \approx - 23{,}3$ м; 3) машины движутся навстречу друг другу, причем вторая машина едет слева направо, т.е. $V_{1x} < 0$, $V_{2x} > 0$: $t_0 = - 70/3 \approx 23{,}3$ с, $x_0 = - 70/3 \approx - 23{,}3$ м; 4) обе машины движутся справа налево, т.е. $V_{1x} < 0$, $V_{2x} < 0$: $t_0 = - 70$ с, $x_0 = 350$ м.

Пример 5. Катер от пристани А к пристани Б едет 6 часов и столько же обратно. Ежедневно с 6.00 до 15.00 от пристани А катера отходят каждые 30 минут, а от пристани Б – каждые 45 минут. А с 15.00 до 24.00 – наоборот. Сколько катеров насчитает в пути пассажир по дороге из А в Б, если он поедет рейсом, отправляющимся от пристани А в 11.00? Катера, встреченные на пристани, не считаются.

Решение. Пассажир прибудет на пристань Б в 17.00, а значит встретит вне пристани все катера, которые выйдут из Б с 6.00 до 16.30 включительно. С 6.00 до 15.00 включительно из Б выйдет 13 катеров, еще 3 катера отойдет с 15.30 до 16.30 включительно. Ответ: 16 катеров.

Пример 6. Ровно в 13.00 дядя Федор отправился на электричке из Москвы в Простоквашино. В то же самое время из Простоквашино в Москву на скором поезде отправился кот Матроскин. В 14.00 на промежуточной станции Матроскин увидел дядю Федора и быстро перебежал к нему в электричку. Во сколько они приедут в Простоквашино, если средняя скорость поезда на 20 % больше средней скорости электрички?

Решение. Пусть из Простоквашино до промежуточной станции Матроскин ехал время t_1 (на скором поезде), а обратно t_2 (на электричке). Поскольку туда и обратно Матроскин проехал одинаковое расстояние, то V_1 t_1 = V_2 t_2, но по условию V_1=kV_2. (k = 1,2). Поэтому t_2 = kt_1 = 1,2 часа = 1 час 12 минут. Таким образом, дядя Федор и Матроскин приедут в Простоквашино в 15 часов 12 минут.

Пример 7. Первую треть пути черепаха проползла равномерно за 1 час, вторую треть — тоже равномерно, но за 2 часа, третью — тоже равномерно, но за три часа. Во сколько раз средняя скорость на первой половине пути больше, чем на второй?

Решение. Очевидно, первую половину пути черепаха проползла за 2 часа (за первый час первую треть пути и еще за час половину второй трети пути), а вторую половину – за четыре часа. Поэтому средняя скорость на первой половине пути **в два раза** больше, чем на второй.

Пример 8. Несколько часов автомобиль ехал со скоростью $V_1 = 40$ км/ч, затем ровно $t_2 = 1$ час он простоял в пробке, и далее до конечного пункта он ехал $t_3 = 2$ часа со скоростью $V_3 =$ 60 км/ч. Найдите его среднюю скорость за последние $\tau = 2.5$ часа. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время путешествия. Если Вы не сможете искомую величину найти точно, укажите диапазон ее возможных значений. В любом случае ответ должен быть обоснован.

Решение. Поскольку по условию $t_3 < \tau < t_2 + t_3$, то за последние $\tau = 2{,}5$ часа автомобиль двигался только время t_3, пройдя при этом путь $V_3 t_3$, и его средняя скорость за этот интервал времени была равна: $V_{ср1}$ = $V_3 t_3 / \tau = 48$ км/час. Что касается средней скорости автомобиля за все время путешествия, то поскольку полное время путешествия не известно, то дать точный ответ **в общем виде** нельзя. Но можно утверждать, что искомая средняя скорость на всем пути $V_{ср}$ не может быть меньше минимальной средней скорости на отдельных частях пути или больше максимальной средней скорости на отдельных частях пути. Поэтому $\min(V_1, V_{ср2}) \le V_{ср} \le \max(V_1, V_{ср2})$, где $V_{ср2} = V_3 t_3 / (t_2 + t_3)$ – средняя скорость за время $t_2 + t_3$ в конце путешествия. К счастью подстановка чисел, данных в условии задачи, дает $V_{ср2} = V_1 =$ 40 км/час. Поэтому в этом частном случае мы получаем точный ответ на второй вопрос задачи.

Задачи на прямолинейное равноускоренное движение

Пример 1. Камень подброшен вертикально вверх с поверхности земли со скоростью V_0. Вывести формулы для: 1) времени максимального подъема камня; 2) высоты максимального подъема камня; 3) времени нахождения камня в воздухе; 4) проекции скорости камня на вертикальную ось при падении на землю.

Пример 2. С балкона, расположенного на высоте h=10 м от земли, бросают вертикально вверх мячик с начальной скоростью V_0 = 5 м/с. Найти время, через которое мячик упадет на землю.

Пример 3. Частица движется по оси X. Координата частицы зависит от времени t по закону $x = v_0t - gt^2/2$, где v_0 = 5 м/с, g = 10 м/с^2. Найти путь, пройденный частицей за T = 2 с после первого прохождения начала координат.

Пример 4. Автобус движется в течение времени τ = 20 с по прямой до остановки, проходя при этом расстояние L = 310 м. Его начальная скорость V = 15 м/с. Менялось ли ускорение автобуса по направлению? Ответ обоснуйте.

Пример 5. За τ = 3 с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло L = 30 м, увеличив свою скорость в n = 4 раза. Определите конечную скорость тела $V_к$.

Пример 6. Тело в течение времени τ двигалось с постоянной скоростью V. Затем скорость его линейно нарастала со временем так, что через время 2τ от начала движения она была равна 2V. Определите путь, пройденный телом за время t > τ от начала движения.

Пример 7. С башни высотой h бросают одновременно два шарика: один вертикально вверх со скоростью V_1, а другой – вертикально вниз со скоростью V_2. Чему равен промежуток времени, отделяющий падение шариков на землю?

Пример 8. Тело начинает двигаться с постоянным ускорением a. Через время τ ускорение меняет направление на противоположное, сохраняя величину. Через какое время после этого тело достигнет точки старта? Какая у него при этом будет величина скорости?

Пример 9. С какой скоростью нужно подбросить вертикально вверх камень, чтобы на высоту h = 30 метров он поднялся за τ = 2 секунды? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Пример 10. Расстояние между двумя свободно падающими из одной и той же точки крыши каплями через время τ после начала падения второй капли было равно L. На сколько позднее первой капли начала падать вторая капля?

Решения задач на прямолинейное равноускоренное движение

Пример 1. Камень подброшен вертикально вверх с поверхности земли со скоростью V_0. Вывести формулы для: 1) времени максимального подъема камня; 2) высоты максимального подъема камня; 3) времени нахождения камня в воздухе; 4) проекции скорости камня на вертикальную ось при падении на землю.

Решение. Свяжем систему отсчета с землей. Направим ось 0y вертикально вверх, за ноль примем точку бросания, за начало отсчета времени — момент бросания. Тогда по формулам (9) и (12) теоретической части занятия зависимости проекции скорости камня на ось y и координаты камня от времени будут иметь вид: $V_y(t) = V_0 - gt$, $y(t) = [(V_y(t))^2 - (V_0)^2]/(-2g)$. Теперь заметим, что в момент максимального подъема скорость камня равна нулю. Действительно, если бы она не была равна нулю, камень либо мог еще подняться, либо уже успел спуститься, а значит, находится не на максимальной высоте подъема. Приравнивая скорость камня нулю, находим его время подъема на максимальную высоту $t_{под} = V_0/g$ и саму эту высоту $h_{макс} = (V_0)^2/(2g)$. Для того, чтобы найти время нахождения камня в воздухе $t_п$ приравняем его координату нулю, используя формулу (10) теоретической части занятия: $V_0t_п - g(t_п)^2/2 = 0$. Последнее уравнение, очевидно, имеет два корня: $t_{п1} = 0$ и $t_{п2} = 2V_0/g$. Первый корень не походит, т.к. соответствует моменту бросания камня. Таким образом, время нахождения камня в воздухе $t_п = 2V_0/g$. Проекцию скорости камня на вертикальную ось 0y при падении на землю найдем, подставив время полета $t_п = 2V_0/g$ в зависимость проекции скорости камня на ось 0y от времени: $V_y(t_п) = -V_0$.

Пример 2. С балкона, расположенного на высоте h=10 м от земли, бросают вертикально вверх мячик с начальной скоростью $V_0 = 5$ м/с. Найти время, через которое мячик упадет на землю.

Решение. Свяжем систему отсчета с землей, а начало отсчета времени с моментом бросания мячика. При этом систему координат можно выбрать как минимум тремя разными способами, которые будут приводить к разным исходным уравнениям. Рассмотрим для сравнения все эти три способа.

Способ 1. Поместим начало координат **на земле** под точкой бросания и направим ось OY вертикально **вверх**. Тогда по формуле (10) теоретической части занятия имеем следующее уравнение движения мяча $y(t) = h + V_0t - gt^2/2$. Это уравнение определяет координату мяча по отношению к земле в любой момент времени движения. Очевидно, искомое время полета мяча $t_п$ соответствует условию $y(t_п) = 0$, т.е.

$$h + V_0t_п - g(t_п)^2/2 = 0. \qquad (2.1)$$

Решая уравнение (2.1), получим два корня: $t_{п1} = [V_0 - [(V_0)^2 + 2gh]^{1/2})/g$ и $t_{п2} = [V_0 + [(V_0)^2 + 2gh]^{1/2})/g$. Первый корень не походит, т.к. заведомо не является положительным и, следовательно, соответствует моменту времени до бросания камня или моменту бросания камня (при h = 0). Второй корень, очевидно, всегда положителен и дает нам ответ на вопрос задачи: $t_п = [V_0 + [(V_0)^2 + 2gh]^{1/2})/g = 2$ с.

Способ 2. Поместим начало координат **на балконе** в точке бросания мяча и направим ось OY вертикально **вверх**. Тогда уравнение движения мяча будет иметь вид $y(t) = V_0t - gt^2/2$, а искомое время полета мяча $t_п$ соответствует условию $y(t_п) = - h$. После элементарных алгебраических преобразований мы опять приходим к уравнению (2.1) и далее действуем аналогично первому способу. Однако, исходные уравнения у нас совсем другие. Поэтому будет грубой ошибкой выбрать начало координат на балконе, а потом сразу записать уравнение (2.1), поскольку уравнение (2.1) в этом случае не следует непосредственно из основных кинематических соотношений и его необходимо вывести!

Способ 3. Поместим начало координат **на балконе** в точке бросания мяча и направим ось OY вертикально **вниз**. Тогда уравнение движения мяча будет иметь вид $y(t) = -V_0t + gt^2/2$, а искомое время полета мяча $t_п$ соответствует условию $y(t_п) = h$. После элементарных алгебраических преобразований мы опять приходим к уравнению (2.1) и далее действуем аналогично первому способу. Однако, исходные уравнения у нас отличаются от исходных уравнений в первых двух способах.

Вывод: прежде чем писать уравнения, описывающие движения тел, надо ОБЯЗАТЕЛЬНО описать (для удобства можно и (или) нарисовать) ту систему отсчета, в которой уравнения предполагается записывать. При отсутствии такого описания задача не может считаться правильно решенной!

Пример 3. Частица движется по оси X. Координата частицы зависит от времени t по закону $x = v_0t - gt^2/2$, где $v_0 = 5$ м/с, $g = 10$ м/с^2. Найти путь, пройденный частицей за T = 2 с после первого прохождения начала координат.

Решение. Приравнивая координату частицы нулю, легко получим, что начало координат частица пройдет дважды в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = 2V_0/g > t_1$. Как известно, при прямолинейном движении путь, пройденный за какой-то интервал времени, равен модулю разности координат тела в начале и в конце этого интервала, только если все время тело двигалось, не меняя направление своего движения. Поэтому для начала найдем, как зависит проекция скорости частицы на ось X от времени. Из сравнения вида зависимости координаты частицы от времени с формулой (10) теоретической части занятия следует, что частица движется равноускорено с ускорением g, направленным против оси X и с начальной (в момент времени $t_0 = 0$) скоростью v_0, направленной по оси X (заметим, что в данном конкретном примере случайно оказалось, что $t_1 = t_0$). Поэтому проекция скорости частицы на ось X зависит от времени следующим образом: $V_x(t) = v_0 - gt$. Видно, что частица останавливается в момент времени $t_{пов} = V_0/g = 0{,}5$ с $< T$, а затем меняет направление своего движения на противоположное, начиная двигаться против оси X. Поэтому путь, пройденный частицей к моменту времени $T > t_{пов} = V_0/g$, отсчитываемый от момента времени времени $t_1 < t_{пов}$, следует рассчитывать по формуле: $L = x(t_{пов}) - x(t_1) + x(t_{пов}) - x(T) = 2\,x(t_{пов}) - x(T)$, где учтено, что по условию $x(t_1) = 0$. Т.к. $x(t_{пов}) = (V_0)^2/(2g)$, то имеем: $L = (V_0)^2/g - v_0T + gT^2/2 = 12{,}5$ м.

Пример 4. Автобус движется в течение времени $\tau = 20$ с по прямой до остановки, проходя при этом расстояние $L = 310$ м. Его начальная скорость $V = 15$ м/с. Менялось ли ускорение автобуса по направлению? Ответ обоснуйте.

Решение. Направим ось X в направлении движения автобуса. Очевидно, при подъезде к остановке у автобуса будет отрицательное ускорение (ему надо остановиться). Предположим, что у автобуса не было положительного ускорения. Тогда он сможет проехать не более, чем $V\tau = 300$ метров $< L$, что противоречит тому, что по условию задачи, он проехал $L = 310$ метров. Значит наше предположение неверно, т.е. автобус менял ускорение по направлению.

Пример 5. За $\tau = 3$ с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло $L = 30$ м, увеличив свою скорость в $n = 4$ раза. Определите конечную скорость тела $V_к$.

Решение. Поскольку в условии говориться об увеличении в 4 раза скорости тела (а не её модуля), то значит, вектора начальной и конечной скоростей тела сонаправлены, и тело двигалось все время в одном и том же направлении. Поэтому, пройденный телом путь равен модулю изменения координаты тела. По формуле (11) теоретической части занятия для разности координат при равноускоренном движении имеем: $L = \tau\,(V_к + V_к/n)/2$. Откуда $V_к = 2nL/[(n + 1)\tau] = 16$ м/с.

Пример 6. Тело в течение времени τ двигалось с постоянной скоростью V. Затем скорость его линейно нарастала со временем так, что через время 2τ от начала движения она была равна 2V. Определите путь, пройденный телом за время $t > \tau$ от начала движения.

Решение. Направим ось X по направлению движения тела. За первый интервал времени τ тело прошло путь $L_1 = V\tau$. Затем в момент времени τ тело начало двигаться равноускоренно с ускорением $a = V/\tau$ и начальной скоростью V, направленными по оси X. Поэтому за время $(t – \tau)$ от начала равноускоренного движения тело пройдет путь $L_2 = V(t – \tau) + V(t – \tau)^2/(2\tau)$. Полный путь, пройденный телом от начала движения $L = L_1 + L_2 = Vt + V(t – \tau)^2/(2\tau)$.

Пример 7. С башни высотой h бросают одновременно два шарика: один вертикально вверх со скоростью V_1, а другой – вертикально вниз со скоростью V_2. Чему равен промежуток времени, отделяющий падение шариков на землю?

Решение. Время падения шарика, брошенного вертикально вверх, можно найти любым из трех способов, рассмотренных в Примере 2. В результате получим, что $t_{п1} = [V_1 + [(V_1)^2 + 2gh]^{1/2})/g$. В любом из трех способов уравнение движения второго шарика отличается от уравнения движения первого заменой V_1 на «$–V_2$» (поскольку шарики брошены в противоположные стороны, проекции их скоростей на одну и ту же ось будут иметь противоположные знаки). Поэтому для времени падения второго шарика, очевидно, имеем: $t_{п2} =$

$[-V_2 + [(V_2)^2 + 2gh]^{1/2})/g$. Отсюда находим промежуток времени, отделяющий падение шариков на землю $\tau = t_{п1} - t_{п2} = [V_1 + V_2 + [(V_1)^2 + 2gh]^{1/2} - [(V_2)^2 + 2gh]^{1/2})/g$.

Пример 8. Тело начинает двигаться с постоянным ускорением a. Через время τ ускорение меняет направление на противоположное, сохраняя величину. Через какое время после этого тело достигнет точки старта? Какая у него при этом будет величина скорости?

Решение. Направим ось X вдоль первоначального направления ускорения. Тогда уравнение движения тела будет иметь вид: $x(t) = at^2/2$ для $t < \tau$ и $x(t) = a\tau^2/2 + (t - \tau)a\tau - a(t - \tau)^2/2$ при $t > \tau$. При записи последней формулы учтено, что в момент времени τ тело имеет координату $a\tau^2/2$ и скорость $a\tau$. Момент времени, когда тело вернется в точку старта найдем из условия: $x(t_в) = 0$. Т.к. нас интересует не сам этот момент времени, а величина $T = t_в - \tau$, то, будем сразу решать уравнение относительно T: $a\tau^2/2 + Ta\tau - aT^2/2 = 0$. Это уравнение имеет два корня: $T_1 = [1 - (2)^{1/2}]\tau < 0$ не подходит, поскольку соответствует моменту времени до изменения направления ускорения на противоположное, $T_2 = [1 + (2)^{1/2}]\tau$. Величину скорости в момент, когда тело вернется в точку старта, найдем по формуле зависимости проекции скорости на ось X при $t > \tau$: $V_x(t) = a\tau - (t - \tau)a$. Откуда имеем: $V_x(t_в) = -(2)^{1/2}a\tau$. И, следовательно, искомая величина скорости равна $V(t_в) = (2)^{1/2}a\tau$.

Пример 9. С какой скоростью нужно подбросить вертикально вверх камень, чтобы на высоту h = 30 метров он поднялся за τ = 2 секунды? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Свяжем систему отсчета с землей, координатную ось Oy направим вертикально вверх, нулевую точку возьмем на поверхности земли, а за начало отсчета времени возьмем момент бросания камня. Пусть камень брошен вертикально вверх со скоростью V. Тогда закон движения камня будет иметь вид: $y(t) = Vt - gt^2/2$, где g – ускорение свободного падения. Подставляя данные задачи, получим: $h = V\tau - g\tau^2/2$. Откуда $V = (h + g\tau^2/2)/\tau = 25$ м/с.

Пример 10. Расстояние между двумя свободно падающими из одной и той же точки крыши каплями через время τ после начала падения второй капли было равно L. На сколько позднее первой капли начала падать вторая капля?

Решение. Поскольку в задаче говорится о свободно падающих каплях, то мы будем считать, что через время τ после начала падения второй капли, обе капли еще находятся в воздухе. Поместим начало координат в точку отрыва капель от крыши, ось 0y направим вертикально вниз, а за начало отсчета времени возьмем начало падения 1-ой капли. Тогда, обозначив через t_0 искомое время запаздывания начала падения 2-ой капли относительно начала падения 1-ой капли, получим: $L = y_1(\tau) - y_2(\tau) = g(t_0 + \tau)^2/2 - g\tau^2/2 = g(t_0)^2/2 + gt_0\tau$. Решая получившееся квадратное уравнение относительно t_0, получим два корня: $t_{01} = -\tau - [\tau^2 + 2L/g]^{1/2}$ и $t_{п2} = -\tau + [\tau^2 + 2L/g]^{1/2}$. Первый корень не походит, т.к. заведомо не является положительным.

Второй корень, очевидно, всегда не отрицателен и дает нам ответ на вопрос задачи: $t_п = -\tau + [\tau^2 + 2L/g]^{1/2}$.

Задачи на движение тела, брошенного под углом к горизонту

Пример 1. Из орудия с поверхности земли произведен выстрел вверх под углом α к горизонту. Начальная скорость снаряда V, поверхность земли горизонтальна. Свяжем систему отсчета с землей, начало координат с местом выстрела, начало отсчета времени – с моментом выстрела. Направим ось 0y вертикально вверх, а ось 0x горизонтально в направлении выстрела. Найдите: уравнение траектории снаряда, т.е. зависимость y(x); время полета и дальность полета снаряда, наибольшую высоту и время подъема на нее.

Пример 2. Камень роняют с высоты H и одновременно из этой точки бросают другой камень горизонтально со скоростью V. Найти время падения на землю каждого из камней.

Пример 3. Два тела брошены с одинаковой начальной скоростью под углами α и (90° – α) к горизонту. Определить отношение дальностей полета и наибольших высот подъема тел.

Решения задач на движение тела, брошенного под углом к горизонту

Пример 1. Из орудия с поверхности земли произведен выстрел вверх под углом α к горизонту. Начальная скорость снаряда V, поверхность земли горизонтальна. Свяжем систему отсчета с землей, начало координат с местом выстрела, начало отсчета времени – с моментом выстрела. Направим ось 0y вертикально вверх, а ось 0x горизонтально в направлении выстрела. Найдите: уравнение траектории снаряда, т.е. зависимость y(x); время полета и дальность полета снаряда, наибольшую высоту и время подъема на нее.

Решение. В выбранной системе отсчета проекции начальной скорости снаряда (его скорости в момент бросания) на оси 0x и 0y равны соответственно $V_{0x} = V\cos\alpha$ и $V_{0y} = V\sin\alpha$. Движение вдоль оси 0x будет равномерным ($a_x = 0$), а вдоль оси 0y – равноускоренным ($a_y = -g$). Поэтому, мы можем воспользоваться формулами (13) и (14) теоретической части задания. Выражая время t через координату x и подставляя результат в формулу для координаты y, получим: $t = x/[V\cos\alpha]$, $y(x) = x\,\mathrm{tg}\alpha - gx^2/[2V^2\cos^2\alpha]$, т.е. траектория будет параболой с ветвями направленными вниз. Время и дальность полета найдем, приравняв y(t) и y(x) нулю: $Vt\sin\alpha - gt^2/2 = 0$, $x\,\mathrm{tg}\alpha - gx^2/[2V^2\cos^2\alpha] = 0$. Решая первое уравнение, находим два решения для момента времени, когда y = 0. Решая второе уравнение, находим два значения координаты x, при которых y = 0. Одно из каждых пар решений (нулевое) соответствует моменту выстрела и x-ой координате точки вылета снаряда. А другое решение соответствует моменту падения и координате места падения снаряда: $t_0 = 2V\sin\alpha/g$, $L = 2V^2\cos\alpha\sin\alpha/g = V^2\sin2\alpha/g$. Здесь использована тригонометрическая формула 2 $\cos\alpha \sin\alpha = \sin2\alpha$. Заметим, что при фиксированном значении скорости снаряда его дальность будет максимальна при выстреле под углом $\alpha = 45°$ (т.к. $\sin90° = 1$, а для всех других углов $\sin2\alpha < 1$). Наибольшую высоту подъема найдем, пользуясь одной из формул для разности координат при равноускоренном движении: $y - y_0 = ((V_y)^2 - (V_{0y})^2)/[2a_y]$. Учитывая, что $a_y = -g$ и в точке максимального подъема вертикальная составляющая скорости равна нулю (иначе тело бы либо еще поднялось, либо уже успело спуститься), получаем $h_{max} = (V\sin\alpha)^2/[2g]$. Время подъема на максимальную высоту найдем, приравняв $V_y(t)$ нулю: $V\sin\alpha - gt = 0$. Откуда $t_п = V\sin\alpha/g = t_0/2$, т.е. время подъема снаряда равно половине времени всего его полета.

Пример 2. Камень роняют с высоты H и одновременно из этой точки бросают другой камень горизонтально со скоростью V. Найти время падения на землю каждого из камней.

Решение. Свяжем систему отсчета с землей, за начало координат возьмем точку бросания камней, а за начало отсчета времени – момент их бросания. Ось Oy направим вертикально вниз. Тогда y-ая координата поверхности земли будет равна H. Поскольку проекция скоростей обоих камней на ось Oy равна нулю, то закон изменения координаты y обоих камней будет одинаковым: $y(t) = gt^2/2$. Соответственно время падения камней найдем из условия равенства их координат координате поверхности земли: $y(t_п) = H$. Откуда $t_п = (2H/g)^{1/2}$.

Пример 3. Два тела брошены с одинаковой начальной скоростью под углами α и $(90° - \alpha)$ к горизонту. Определить отношение дальностей полета и наибольших высот подъема тел.

Решение. В примере 1 были получены формулы для дальности полета и наибольшей высоты подъема: $L(\alpha) = V^2\sin2\alpha/g$ и $h_{max}(\alpha) = (V\sin\alpha)^2/[2g]$. Поэтому $L(90° - \alpha) = V^2\sin(180° - 2\alpha)/g = V^2\sin2\alpha/g = L(\alpha)$, $h_{max}(90° - \alpha) = (V\sin(90° - \alpha))^2/[2g] = (V\cos\alpha)^2/[2g]$. Таким образом, дальности полета указанных тел будут одинаковыми, а высоты подъема разными: $h_{max}(\alpha)/h_{max}(90° - \alpha) = (\mathrm{tg}\alpha)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha$.

Общие указания по оформлению решения задач.

1. В решении следует в произвольной форме пояснять, на основании чего записаны те или иные формулы. Например: «пользуясь определением средней величины скорости, получим…» или « используя формулу для изменения координаты при равномерном прямолинейном движении, получим…» и т.п.

2. Решение, как правило, следует проводить «в общем виде» (в буквенных обозначениях), а не «в числах». Исключения допустимы только в тех случаях, когда учет конкретных числовых значений величин, данных в задаче, принципиально упрощает ее решение.

3. В окончательный ответ не должны входить величины, которых нет в условии задачи, за исключением различных физических постоянных (например, ускорение свободного падения всегда считается известным по умолчанию).

4. Если в условии даны численные значения известных величин, то ответ должен обязательно содержать не только формулу, но и число.

5. При решении задачи нельзя записывать уравнения, содержащие сумму или разность величин разной размерности, а также размерных и безразмерных величин. Т.е. записи вида «t+1», где t – время, недопустимы!