11 класс (2018-19 учебный год).

Занятие 1. Введение в кинематику материальной точки

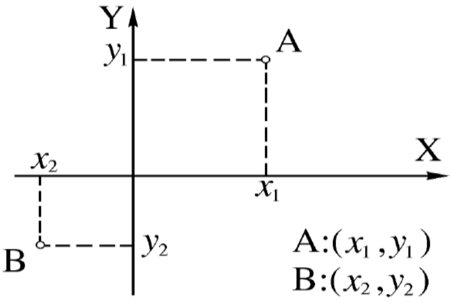
Часть 1. Теория

Система отсчета. Материальная точка. Перемещение. Длина пути

Механическим движением тела называется изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени.

Кинематика — это часть механики, которая изучает механическое движение тел без исследования причин, вызвавших это движение.

Положение любого тела в пространстве можно задать только по отношению к другому телу, которое называют **телом отсчета** (попробуйте описать своё положение в большом ровном поле пшеницы, границы которого не видны из-за тумана). С телом отсчета связывают **систему координат**, которая позволяет формализовать и, благодаря этому, значительно облегчить описание положения интересующего нас тела. Наиболее часто применяется декартовая система координат, названная по имени французского ученого René Descartes (1596–1650). На плоскости через выбранное начало отсчета *O* проводятся под прямым углом две координатные оси *X* и *Y*. Из интересующей нас точки опускаются перпендикуляры на эти оси и прочитываются на них координаты *x* и *y* соответственно. Координаты точки на плоскости записывают в круглых скобках через запятую: *(x, y)*. При необходимости задания положения точки в пространстве используют три взаимно перпендикулярных оси, проходящих через общее начало координат.



Для краткости в дальнейшем вместо координат мы часто будем использовать векторную терминологию. В этом случае положение любой точки *A* задается вектором $\overrightarrow{r_A}$, проведенным из начала координат к точке *A*. При этом вектор $\overrightarrow{r_A}$ обычно называют **радиус – вектором** точки *A*. Напомним, что **координатами вектора** (или **проекциями вектора**) называют разность координат его начала и конца. Поэтому, очевидно, что координаты вектора $\overrightarrow{r_A}$ совпадают с координатами точки *A*: $\overrightarrow{r_A} = (x_A, y_A, z_A)$. Подробнее о свойствах векторов при необходимости можно посмотреть в **Приложении 1** (стр. 13-15).

Важное место в физике и, в частности, в кинематике занимает модель материальной точки. Все окружающие нас тела имеют размер. Однако, к счастью, во многих случаях ответы на интересующие нас вопросы, либо совсем не зависят от размеров, формы тел и их ориентации в пространстве, либо эта зависимость является очень слабой и ею можно пренебречь, сопоставив всему телу какую-нибудь одну его точку. **Материальной точкой** называется физическое тело, размерами которого ***в условиях данной задачи*** можно пренебречь. В дальнейшем для краткости мы будем часто называть материальную точку просто точкой или частицей.

Хочу особенно обратить Ваше внимание на слова «в условиях данной задачи». Иногда, например, ошибочно считается, что если размеры тела много меньше размеров области пространства, в которой оно движется, то это тело можно считать материальной точкой. На самом деле это совершенно не обязательно. Очень многое зависит от того, как движется тело и что именно интересует нас в его движении.

Идеально модель материальной точки подходит для описания поступательного движения тел. **Поступательным** называется движение тела, при котором все его точки движутся одинаково. Заметим, что при поступательном движении прямая, соединяющая две произвольные точки тела, переносится параллельно самой себе. Для доказательства достаточно вспомнить свойства операции параллельного переноса в геометрии.

Со временем положение частицы может меняться. Зависимость координат или радиус – вектора частицы от времени называют **законом движения** этой частицы. Для нахождения закона движения какой-либо материальной точки кроме тела отсчета и связанной с ним системы координат необходимы также способ измерения времени (часы) и начало его отсчета.

Тело отсчета, связанную с ним систему координат, а также способ измерения времени и начало его отсчета, называют **системой отсчета.**

Выбор системы отсчета **в кинематике** произволен и подчинен в основном удобству решения рассматриваемой задачи. Например, вряд ли будет удобно изучать движение машины по земле, если в качестве тела отсчета выбрать Солнце.

Движение точки характеризуют также ее перемещением, траекторией и длиной пути.

Перемещением частицы за некоторый промежуток времени называется вектор $\vec{S}$, соединяющий положение частицы в начале и в конце этого промежутка времени.

Пусть $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ радиус – векторы, задающие соответственно начальное и конечное положения материальной точки на некотором промежутке времени. Тогда по определению суммы и разности векторов перемещение $\vec{S}$ частицы за этот промежуток времени равно:

$$\vec{S} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \Delta\vec{r}\ .$$

Здесь и далее греческая буква Δ (дельта) обозначает изменение величины, перед которой она стоит. Таким образом, вектор перемещения за некоторый промежуток времени равен изменению радиус – вектора точки за это время.

Траектория частицы — это линия, которую описывает материальная точка в пространстве при своем движении. Если частица движется по отрезку прямой, то такое движение называется **прямолинейным.** Во всех остальных случаях движение называется **криволинейным.**

Длиной пути (или путем частицы) называют длину участка траектории, пройденного частицей за данный промежуток времени. Длину пути обычно обозначают буквой L.

Речь идет именно о «пройденном участке», а не о длине участка траектории между начальным и конечным положением тела. Это будут разные величины, в частности, когда тело возвращается по ранее пройденному участку траектории или движется по замкнутой траектории.

Пусть функция $L_0(t)$ имеет смысл длины пути, пройденного с некоторого момента времени t_0 к моменту времени $t \geq t_0$. Тогда, очевидно, что $L_0(t_0) = 0$ и при $t \geq t_0$ функция $L_0(t)$ является неубывающей функцией времени, принимающей только неотрицательные значения. Кроме того, зная функцию $L_0(t)$ можно легко найти длину пути $L(t_1,\ t_2)$, пройденного телом между любыми моментами времени t_1 и t_2 ($t_0 \leq t_1 \leq t_2$): $L(t_1, t_2) = L_0(t_2) - L_0(t_1)$.

По определению модуля вектора модуль перемещения равен длине отрезка, соединяющего начальное и конечное положения тела. Поэтому модуль перемещения частицы за некоторый интервал времени не может превышать длину пути, пройденного ею за этот же интервал времени. Более того, очевидно, что равенство этих двух величин возможно только при прямолинейном движении частицы **в одном направлении**. Кроме того, величина $L(t_1,\ t_2)$ приблизительно равна модулю перемещения частицы и в случае криволинейного движения, если рассматриваются достаточно малые промежутки времени, когда два положения частицы A и B настолько близки, что длина соединяющей их дуги практически равна длине отрезка AB.

Средняя величина скорости. Средняя и мгновенная скорости

Важной характеристикой движения является его скорость. В кинематике используют несколько различных видов скоростей. Иногда, особенно в прикладных задачах, движение характеризуют средней величиной скорости. **Средней величиной скорости** называется скалярная величина, равная отношению длины пути ΔL, пройденного частицей, к промежутку времени Δt, за который этот путь был пройден:

$$u_{cp} = \Delta L / \Delta t \ . \qquad (1)$$

Заметим, что средняя величина скорости не может быть отрицательной величиной.

Равномерным движением называют движение, при котором частица за **любые** равные промежутки времени проходит участки траектории одинаковой длины. Равномерное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

Очевидно, при равномерном движении средняя величина скорости не зависит от времени усреднения, т.е. от величины интервала времени Δt в формуле (1). Поэтому можно сказать, что равномерное движение это движение с постоянной величиной скорости u. В связи с этим часто вместо того, чтобы говорить «машина **равномерно** движется со скоростью *V*», говорят просто «машина движется со скоростью *V*», подразумевая, что поскольку про изменение скорости машины ничего не сказано, значит, скорость постоянна, и, следовательно, движение машины равномерное. Вместе с тем, например, фраза «найти путь, пройденный частицей, к моменту времени, когда ее скорость станет равна *V*» , очевидно, подразумевает, что скорость частицы меняется. Поэтому надо учитывать в каком контексте говорится о скорости *V*.

Из формулы (1) сразу следует, что при равномерном движении длина пути, пройденного частицей с момента t_0 начала ее движения или наблюдения за ее движением, линейно зависит от времени:

$$L = u\left(t - t_0\right), \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Заметим, что перемещение частицы при равномерном движении существенным образом зависит от формы её траектории. Сравните, например, зависимости перемещений от времени при равномерном движении по прямой и окружности.

Если тело движется **прямолинейно и равномерно**, то такое движение всегда происходит в одном направлении (это связано с тем, что, как следует из закона инерции Галилея, который будет изучаться в динамике, скорость любого тела не может менять свое направление скачком). Поэтому, если выбрать ось координат *Ox* вдоль прямой, по которой движется частица, то при равномерном прямолинейном движении всегда будет справедливо равенство $L = \left|x - x_0\right|$. Здесь L – длина пути, пройденного частицей с момента времени t_0 до момента времени t, $x-$ координата частицы в момент времени t, а $x_0 -$ координата частицы в момент времени t_0.

Следовательно, в этом случае формулу (2) можно записать в более общем и удобном для расчётов виде:

$$x - x_0 = u_x\left(t - t_0\right). \qquad (3)$$

В (3) $|u_x| = u$, где u – скорость равномерного движения частицы. Причём $u_x = u$, если частица движется в положительном направлении оси *Ox*, и $u_x = -u$, если – в отрицательном. **Уравнение (3) выражает закон движения материальной точки, движущейся равномерно вдоль оси *Ox*.**

Если существует хотя бы два одинаковых промежутка времени, за которые тело проходит участки траектории разной длины (проходит различный путь), то такое движение называют **неравномерным**. Неравномерным, например, является движение, при котором первоначально покоящееся тело, сначала увеличивает свою скорость, затем опять уменьшает до нуля и, после этого начинает двигаться в противоположную сторону. Таким образом, при неравномерном прямолинейном движении мы не можем быть уверены, что тело движется все время в одном направлении и, следовательно, мы не можем считать, что длина пройденного пути совпадает с модулем перемещения. В этом случае модуль перемещения может оказаться меньше (но не больше!) длины пройденного пути. В том числе, поэтому для характеристики неравномерного движения наряду со средней величиной скорости (скалярная величина) используют также среднюю скорость (векторная величина).

Средней скоростью $\vec{u}_{ср}$ называется векторная величина, равная отношению вектора перемещения $\vec{S}$, совершенного частицей за некоторый промежуток времени Δt, к этому промежутку времени:

$$\vec{u}_{ср} = \vec{S}/\Delta t = \Delta\vec{r}/\Delta t\,, \quad (4)$$

т.к. перемещение равно изменению радиус – вектора частицы.

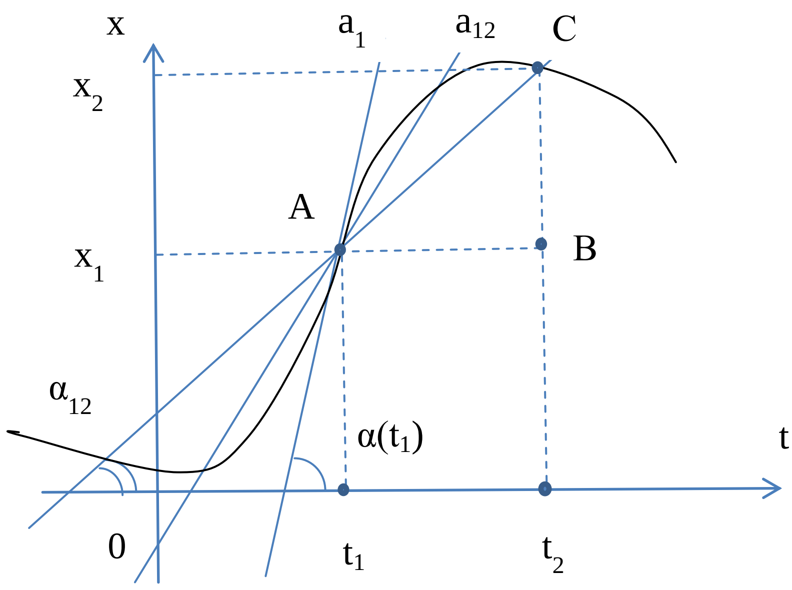
При движении на плоскости векторное равенство (4) эквивалентно двум скалярным равенствам, связывающим проекции средней скорости на декартовые оси с проекциями вектора перемещения на эти же оси:

$$u_x = \Delta x/\Delta t \equiv \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad u_y = \Delta y/\Delta t \equiv \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}. \qquad (5)$$

Очевидно, что в случае прямолинейного движения, следует одну из декартовых осей, например ось *Ox*, по возможности, направлять по направлению движения тела. Тогда проекция вектора перемещения, а значит и проекция вектора средней скорости на вторую ось будут равны нулю. Заметим также, что проекция средней скорости может быть отрицательной величиной.

Для большей наглядности движение часто описывают с помощью графиков. Если по горизонтальной оси (оси абсцисс) откладывать в определенном масштабе время, а по вертикальной оси (оси ординат) откладывать тоже в определенном масштабе значение координаты частицы, то такой график, выражающий зависимость координаты тела от времени, обычно называют **графиком движения**. В случае произвольного движения частицы на плоскости (в пространстве) для полного графического описания движения надо построить два (три) графика движения. Например, для двух (трех) её декартовых координат.

По определению неравномерного движения вектор средней скорости зависит от времени усреднения. Однако, оказывается, что если мы будем уменьшать время усреднения, то, начиная с некоторого его значения, мы обнаружим, что вектор средней скорости больше уже практически не изменяется, все более приближаясь к некоторому, так называемому, предельному значению. В физике это предельное значение называют **вектором мгновенной скорости**. Проиллюстрируем это на примере проекций векторов средней и мгновенной скоростей на ось *Ox*. На рисунке приведен график движения по оси *Ox* при некотором неравномерном движении: по горизонтальной оси в некотором масштабе τ_0 (например, $\tau_0 = 5$ с/см) отложено время, а по вертикальной оси также в некотором масштабе L_0 (например, $L_0 = 10$ м/см) – соответствующее значение координаты тела.



Пользуясь графиком движения по оси *Ox* легко найти проекцию средней скорости частицы на ось *Ox* для любого интервала усреднения. Например, для интервала времени от t_1 до t_2 по формуле (5) она равна:

$$u_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{|CB|\, L_0}{|AB|\, \tau_0} = V_0 tg\alpha_{12},$$

где $V_0 = L_0/\tau_0 -$ масштаб скорости, соответствующий данному графику движения (при указанных значениях L_0 и τ_0, $V_0 = 2\, м/с$), а α_{12} – угол наклона прямой (секущей) *AC*, проходящей через точки *A* и *C* графика движения, соответствующие моментам времени t_1 и t_2.

Напомню, что по определению тангенсом острого угла *α* в прямоугольном треугольнике называется величина, равная отношению катета треугольника, противолежащего этому углу, ко второму катету (см. также **Приложение 2**). Из определения тангенса следует, что при увеличении угла *α* от нуля до *90*°, значение тангенса этого угла монотонно возрастает от нуля до бесконечности (рассмотрите, например, семейство треугольников с общим катетом, прилежащем к острому углу *α*; в этом семействе треугольников длина катета, противолежащего углу *α* будет тем больше, чем больше угол *α*). Для углов больших *90*° справедлива формула приведения: $tg(90^\circ + \alpha) = -tg\alpha$. Заметим, что в соответствии с последней формулой и физическим смыслом тупому углу α_{12} наклона секущей соответствует отрицательная проекция средней скорости.

Таким образом, **проекция средней скорости на ось *Ox* за некоторый интервал времени пропорциональна тангенсу угла наклона соответствующей секущей на графике движения *x*(*t*)**. Коэффициент пропорциональности зависит от масштабов по осям координаты и времени, использованных при построении графика.

Допустим теперь, что мы стали уменьшать интервал времени усреднения $\Delta t = t_2 - t_1$, оставляя неизменным начальный момент времени t_1. При этом угол наклона секущей α_{12} будет постепенно приближаться к углу наклона касательной α_1, проведенной к графику движения в точке *A* с абсциссой t_1. В результате, начиная с некоторого достаточно малого Δt_0 (т.е. при $\Delta t < \Delta t_0$) мы обнаружим, что дальнейшее уменьшение интервала усреднения приводит лишь к незначительному изменению (в приведенном на рисунке примере к незначительному монотонному увеличению) проекции вектора средней скорости на ось *Ox* вплоть до предельного значения, соответствующего тангенсу угла наклона касательной. Это обстоятельство и позволяет ввести понятие проекции вектора мгновенной скорости в момент времени t_1, а значит и понятие вектора мгновенной скорости, который в общем случае определяется своими проекциями на три декартовые оси: **мгновенной скоростью называется** предельное значение средней скорости при стремлении интервала усреднения к нулю. Можно сказать и немного по другому: **мгновенной скоростью** (скоростью в данный момент времени) **или скоростью в данной точке** называется отношение малого перемещения на участке траектории, содержащем эту точку, к достаточно малому промежутку времени, в течение которого это перемещение совершено:

$$\vec{V} = {d\vec{r}}/{dt}. \qquad (6)$$

В (6) и далее <u>символ «*d*» перед переменной подчеркивает, что рассматривается достаточно малое</u>

изменение этой переменной. При этом в каждом случае подразумевается свой критерий «достаточной малости». В случае нахождения мгновенной скорости, как следует из сказанного выше, критерием «достаточной малости» интервала усреднения является условие, что дальнейшее уменьшение его в любое число раз, не приводит к заметному изменению результатов усреднения. Надеюсь, что учащиеся, уже знакомые с операцией дифференцирования, поняли, что правая часть (6) есть просто производная зависимости радиус-вектора частицы от времени (т.е. вектор, проекция которого на ось X, Y или Z равна производной соответствующей координаты частицы по времени).

Из приведенного выше анализа графика движения, очевидно, следует, что проекция мгновенной скорости на ось *Ox* равна:

$$V_x(t) = V_0 tg\alpha(t),$$

где *α(t)* – угол наклона касательной к графику движения, проведенной в точке с абсциссой *t*.

Направление мгновенной скорости особенно просто находится, если известна траектория движения частицы. Пусть в момент времени *t* тело находится в точке *A*, а через некоторое время *Δt* – в точке *C*. Тогда вектор средней скорости за время *Δt* направлен вдоль прямой *AC*, являющейся секущей по отношению к траектории. Если *Δt* стремится к нулю, то точка *C* стремится к точке *A* и секущая *AC* стремится к прямой, касательной к траектории в точке *A*. Следовательно, мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории.

В дальнейшем для краткости во всех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, **мы будем называть вектор мгновенной скорости просто скоростью**. Дело в том, что именно вектор мгновенной скорости наиболее полно (по сравнению со всеми остальными разновидностями понятия скорости) описывает характер движения тела. В частности, оказывается, что, зная для некоторого интервала времени τ зависимость скорости тела от времени и положение тела в один из моментов времени интервала τ, можно однозначно рассчитать положение тела в любой другой момент времени этого интервала (см. ниже формулу (8)).

Ускорение. Кинематический принцип независимости движений. Графики

При неравномерном движении, мгновенная скорость как-либо меняется с течением времени. Быстроту изменения вектора мгновенной скорости и направление, в котором это изменение происходит, характеризует **ускорение**. Так же как и в случае скорости можно вводить понятия среднего и мгновенного ускорений. Например, **мгновенным ускорением** (далее везде просто ускорением) называется отношение изменения мгновенной скорости к достаточно малому промежутку времени, за который это изменение произошло:

$$\vec{a} = d\vec{V}\Big/dt \, . \qquad (7)$$

При этом критерий достаточной малости используемого промежутка усреднения остается таким же, как и при определении мгновенной скорости (см. комментарии после формулы (6)).

Заметим, что каждое из векторных равенств (6) и (7) эквивалентно трем скалярным равенствам для проекций скорости и ускорения на три декартовые оси:

$$V_x = dx/dt,\ V_y = dy/dt,\ V_z = dz/dt;\ a_x = dV_x/dt,\ a_y = dV_y/dt,\ a_z = dV_z/dt.$$

Из последних формул следует, что кинематические характеристики (проекции перемещения, скорости и ускорения) движения частицы вдоль любой оси не связаны <u>непосредственно</u> с кинематическими характеристиками движения вдоль других осей. Это позволяет сформулировать **кинематический принцип независимости движений**: <u>кинематику</u> движения вдоль различных фиксированных направлений можно рассматривать и описывать независимо друг от друга. В действительности, конечно, эти движения объединены общностью течения времени. Кроме того, они могут зависеть друг от друга на уровне динамики, т.е. когда рассматриваются причины, вызвавшие движение.

Наряду с графиками движения часто пользуются **графиками проекции скорости**. Их получают, откладывая по горизонтальной оси в определенном масштабе τ_0 (например, τ_0 = 5 с/см) время, прошедшее с начала отсчета времени, а по вертикальной оси также в некотором масштабе V_0 (например, V_0 = 10 (м/с)/см) – соответствующее значение скорости тела. Т.е. такие графики показывают, как зависит от времени проекция скорости. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше для графика движения, можно доказать, что график проекции скорости позволяет найти проекции среднего и мгновенного ускорений, находя угол наклона соответственно секущей и касательной:

$$a_x = A_0 tg\alpha,$$

где $A_0 = V_0/\tau_0 -$ масштаб ускорения, соответствующий данному графику проекции скорости (при указанных значениях V_0 и τ_0, получаем $A_0 = 2\ м/с^2$).

Кроме того из графика проекции скорости можно найти изменение координаты X частицы по формуле:

$$x(t_1) - x(0) = X_0 S, \qquad (8)$$

В (8) – $X_0 = V_0 \tau_0$ – масштаб изменения координаты, соответствующий данному графику проекции скорости, S – площадь фигуры, ограниченной осью времени, графиком проекции скорости и двумя вертикальными отрезками, проведенными к оси времени из точек графика скорости, соответствующих началу и концу рассматриваемого промежутка времени. Подчеркнем, что площадь следует считать алгебраической величиной: она считается положительной, если соответствующий участок графика скорости лежит выше оси времени и отрицательной в противном случае (при желании вывод (8) можно посмотреть в **Приложении 3**). Заметим также, что с математической точки зрения правая часть (8) равна определённому интегралу от проекции мгновенной скорости на соответствующем интервале времени.

Как уже говорилось, для двух близких моментов времени модуль перемещения почти равен длине пройденного за это же время пути: $\left|\vec{V}\right| = \left|d\vec{r}/dt\right| = dL/dt$. Т.е. величина (модуль) мгновенной скорости равна скорости увеличения пройденного пути (мгновенной путевой скорости), и поэтому аналогично (8) *длина пути, пройденного за некоторый интервал времени пропорциональная площади под соответствующей частью* **графика зависимости величины скорости от времени**. Коэффициент пропорциональности также равен $V_0 \tau_0$.

Наряду с графиками движения, проекции скорости и величины скорости при графическом описании движения используют также **графики проекции ускорения**. Из (6) и (7) видно, что вектор ускорения играет по отношению к вектору скорости ту же роль, что вектор скорости, по отношению к радиус-вектору. Следовательно, с одной стороны, по углу наклона касательной к графику проекции скорости можно найти соответствующую проекцию ускорения. А, с другой стороны, изменение проекции скорости на некоторую ось пропорционально алгебраической площади под соответствующим участком графика проекции ускорения на ту же ось.

В заключение разговора о графиках обратим внимание на то чего на графиках движения, проекции скорости и пройденного пути не может быть:

1) Функция $V_x(t)$ должна быть непрерывной, хотя и может иметь изломы. Дело в том, что разрыв соответствовал бы бесконечно большому ускорению, что не возможно в силу инертности материальных тел (подробнее об этом будем говорить в динамике). Излом на графике функции $V_x(t)$ соответствует разрыву в зависимости ускорения от времени, что в целом ряде физических моделей считается допустимым.

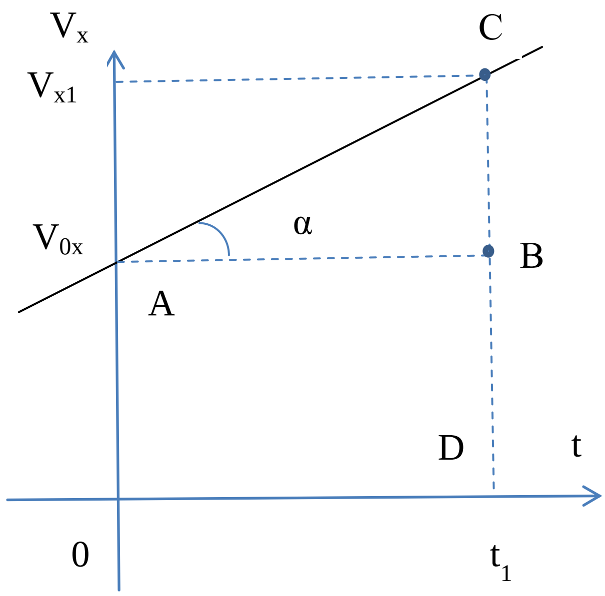
2) Зависимости координат от времени должны быть непрерывными и без изломов, т.к. излом соответствовал бы разрыву в зависимости скорости от времени.

3) Зависимость пройденного пути от времени также должна быть непрерывной и гладкой (без изломов), и, кроме того, функция L(t) должна быть неотрицательной и неубывающей.

Закон движения при равноускоренном прямолинейном движении.

Движение частицы называется **равноускоренным**, если за любые равные промежутки времени вектор ее скорости изменяется на одну и ту же векторную величину. По аналогии с видом зависимости (3) координаты от времени при прямолинейном равномерном движении, нетрудно понять, что при равноускоренном движении проекция скорости на любую координатную ось *0x* изменяется со временем по линейному закону:

$$V_x(t) = V_{0x} + a_x(t - t_0)\,, \qquad (9)$$



где V_{0x} − проекция скорости тела на ось *0x* в момент времени t_0. График зависимости проекции скорости от времени в этом случае будет представлять собой прямую линию. Пример такой зависимости приведен на рисунке (прямая *AC*), где рассмотрен случай $t_0 = 0$ и $a_x > 0$.

Пользуясь (8), сразу получаем (разбивая трапецию *OACD* на прямоугольник *OABD* и прямоугольный треугольник *ABC*), что при равноускоренном движении вдоль оси *Ox*, изменение координаты x может быть рассчитано по формуле $x(t) - x(0) = V_{0x}t + a_x t^2/2$. Аналогично в общем случае $t_0 \neq 0$ имеем:

$$x(t) - x(t_0) = V_{0x}(t - t_0) + \frac{a_x(t - t_0)^2}{2}. \qquad (10)$$

Выражая величину a_x из формулы (9) (или считая площадь трапеции как произведение высоты на половину суммы оснований), можно получить еще одну очень полезную формулу для изменения координаты тела при равноускоренном движении:

$$x(t) - x(t_0) = \frac{V_x(t) + V_{0x}}{2}(t - t_0). \qquad (11)$$

Формулой (11) удобно пользоваться, если мы не знаем ускорения равноускоренного движения, но знаем время движения, его начальную и конечную скорости. Заметим, что из формулы (11) сразу следует, что при равноускоренном движении проекция средней скорости на некотором интервале времени равна половине суммы проекций начальной и конечной скоростей тела на этом интервале времени.

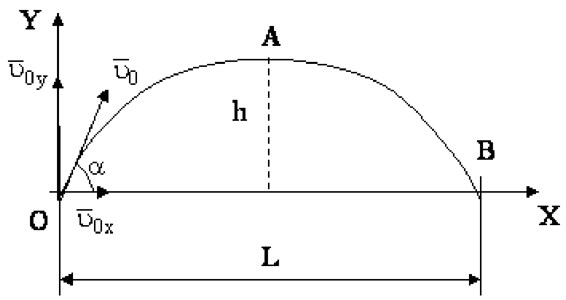
Если же из формулы (9) выразить время движения и подставить его в (11), то получиться третья формула для изменения координаты тела при равноускоренном движении, не содержащая время:

$$x(t) - x(t_0) = \frac{V_x^2(t) - V_{0x}^2}{2a_x}. \qquad (12)$$

Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом к горизонту вблизи поверхности Земли

Вблизи поверхности Земли (т.е. на расстояниях очень малых по сравнению с ее радиусом, равным 6400 км) и при малых скоростях движения, когда сопротивление воздуха пренебрежимо мало, все свободно падающие тела движутся относительно Земли с постоянным ускорением. Это ускорение называют **ускорением свободного падения**. Напомним, что тело считается свободно падающим, если на него не действуют никакие другие тела, кроме Земли. Вектор ускорения свободно падающих тел всегда направлен вертикально вниз к поверхности Земли, его величина равна приблизительно *9,8* м/с^2 и обозначается буквой g. Строго говоря, величина ускорения свободного падения немного зависит от широты местности, например, на земном экваторе она составляет *9,79* м/с^2, а на северном и южном полюсах – *9,83* м/с^2, однако мы этой зависимостью всегда будем пренебрегать. Более того, при расчетах обычно полагают $g = 10$ м/с^2 .

Рассмотрим движение тела, брошенного вблизи поверхности Земли под углом α ($\alpha < 90°$) к горизонту со скоростью V_0. Свяжем систему отсчета с Землей, начало координат поместим в точке бросания тела, ось Oy направим вертикально вверх, а ось Ox – горизонтально в сторону броска тела, за начало отсчета времени возьмем момент броска тела. То, что ускорение свободного падения направлено вертикально вниз, означает, что горизонтальная проекция скорости тела не меняется (иначе бы ускорение имело отличную от нуля проекцию на горизонтальную ось Ox) и равна проекции начальной скорости на ось Ox, а проекция ускорения на ось Oy постоянна и равна «–g». Поэтому имеем:



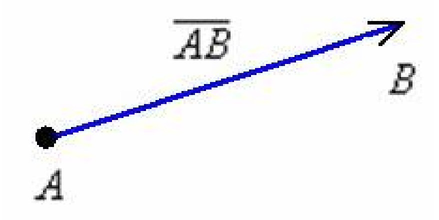
$$V_x = V_{0x} = V_0 \cos\alpha,\ V_y = V_{0y} - gt = V_0 \sin\alpha - gt \qquad (13)$$

Т.е. движение тела, брошенного под углом к горизонту можно рассматривать как наложение двух движений: равномерного движения по горизонтали и равноускоренного движения в вертикальном направлении. Поэтому, пользуясь формулами изменения координат при равномерном и равноускоренном движениях, получим следующие зависимости от времени координат тела брошенного под углом α к горизонту:

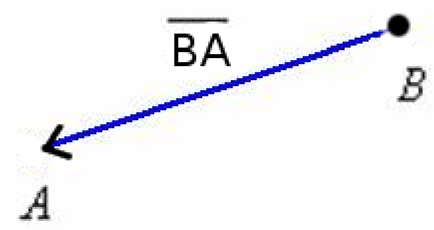
$$x(t) = V_0 t\cos\alpha, \qquad y(t) = V_{0y} - gt = V_0 t\sin\alpha - gt^2/2 \qquad (14)$$

Формулы (13) и (14) позволяют ответить на любые вопросы, относящиеся к кинематике движения тел, брошенных под углом к горизонту.

Приложение 1. Понятие о векторах



Вектором называется направленный отрезок, для которого указаны его начало и конец. В приведенном на рисунке примере началом вектора является точка A, а концом — точка B. В тексте вектор можно обозначать по-разному, например: **AB** (сравните AB — это отрезок), $\overrightarrow{AB}$.(со стрелкой сверху). При такой записи первая буква обозначает начало вектора, а вторая его конец. Часто



вектора обозначают также просто латинскими буквами со стрелкой: $\vec{F}, \vec{a}$. Обычно для краткости мы будем использовать именно такое обозначение. Заметим, что если на рисунке переставить стрелку в другой конец отрезка AB, то получится совершенно другой вектор: **BA**. Причем по определению считают, что **BA = – AB.**

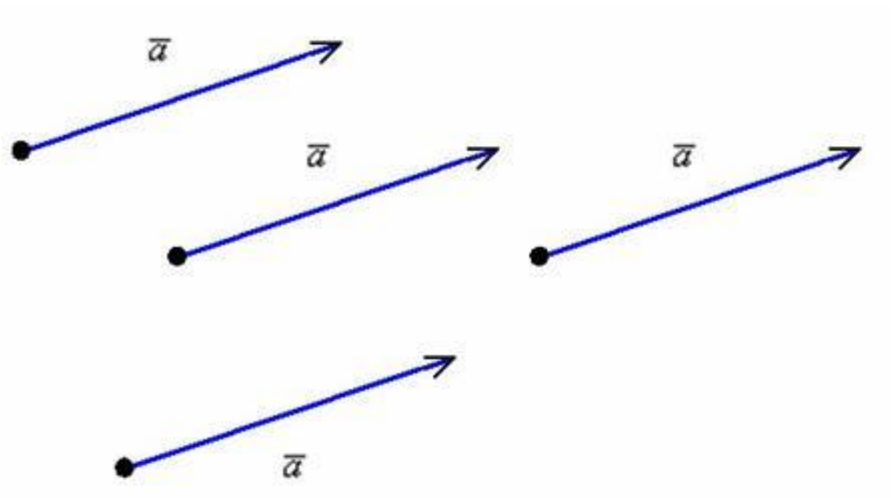
Нулевой вектор — это вектор, у которого начало совпадает с концом.

Проекцией вектора на какую-либо ось называют разность координат по этой оси конца вектора и его начала. Часто проекцию вектора называют также **координатой вектора**. Пусть, например, известны координаты точек A(x_1,y_1) и B(x_2,y_2). Тогда координаты (проекции) вектора $\vec{F}$ = **AB** будут следующими: ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$). Проекцию вектора $\vec{F}$ на ось x (координату вектора по оси x) обозначают F_x, т.е. в нашем примере $F_x = x_2 - x_1$, $F_y = y_2 - y_1$.

Длиной (величиной или **модулем)** вектора **AB** называется длина отрезка AB. Модуль обозначается прямыми скобками: |**AB**|. Модуль (величину) вектора $\vec{F}$ можно обозначать либо также с помощью прямых скобок ($|\vec{F}|$), либо просто буквой без стрелки: F. Для расчета модуля вектора можно воспользоваться теоремой Пифагора: $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$.

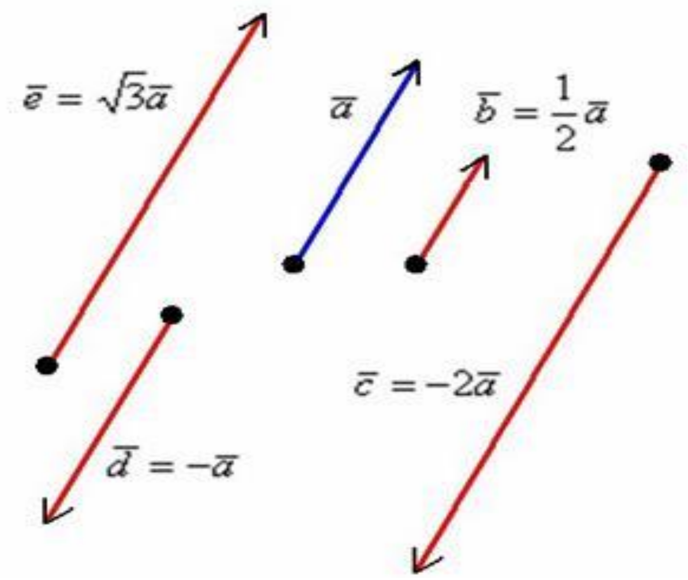
Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарность векторов обозначается обычным значком параллельности: $\vec{F} \parallel \vec{a}$. Если коллинеарные векторы направлены в одном направлении, то такие векторы называются **сонаправленными:** $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Если же коллинеарные векторы направлены в противоположные стороны, то они называются **противоположно направленными:** $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

В математике чаще всего по умолчанию рассматривают так называемые **свободные векторы. Свободный вектор** характеризуется только направлением и модулем, а из какой точки он начинается — неважно. Иными словами, два свободных вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Например, все свободные векторы на рисунке ниже равны между собой:



Очевидно, свободные векторы однозначно задаются своими проекциями (координатами). Т.е. для свободного вектора $\vec{F}$ равного вектору **AB**, начинающемуся в точке $A(x_1,y_1)$ и заканчивающемуся в точке $B(x_2,y_2)$ можно записать: $\vec{F} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Поэтому любое векторное равенство свободных векторов на плоскости эквивалентно двум скалярным равенствам проекций соответствующих векторов на любые две взаимно перпендикулярные оси (на самом деле достаточно, что бы эти две оси не были параллельными).

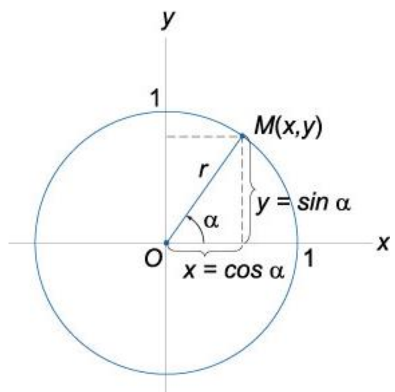
Произведением ненулевого вектора **a** на число c называется такой вектор **b**, длина которого равна |c||**a**|, причём векторы **a** и **b** сонаправлены при c > 0 и противоположно направлены при c < 0. Умножение нулевого вектора на любое число дает снова нулевой вектор. Умножение любого вектора на ноль даёт нулевой вектор. Правило умножения вектора на число проиллюстрировано на рисунке.



Таким образом, при умножении вектора на число получается вектор коллинеарный исходному. Обратное также справедливо: если первый вектор коллинеарен второму, то его можно получить из второго вектора умножением на некоторое число. Нетрудно также убедиться, что если вектор умножается на некоторое число, то и все его координаты (проекции) умножаются на это число.

Приложение 2. Функции косинуса, синуса, тангенса угла и основное тригонометрическое тождество

Часто вместо задания проекций вектора на декартовые оси задают модуль вектора и угол, который он образует с некоторым направлением (например, с горизонталью, вертикалью, поверхностью стола и т.п.). В этих случаях, проекции вектора могут быть найдены с помощью, так называемых, тригонометрических функций угла.



Рассмотрим единичную окружность (окружность единичного радиуса) с центром в начале координат (см. рисунок). Пусть точка M с координатами *x* и *y* лежит на этой окружности, причем отрезок *OM* образует с положительным направлением оси *Ox* угол *α* (угол *α* считается положительным, если отсчитывается в сторону положительного направления оси *Oy*). Тогда координата *x* точки *M* называется **косинусом угла *α*** (*cos α*), а координата *y* точки *M* называется **синусом угла α** (*sin α*):

$$\cos\alpha = x,\ \sin\alpha = y \qquad (П2\text{-}1)$$

Поскольку по построению |*OM*| = *1*, то из (П2-1) следуют другие часто используемые определения косинуса и синуса острого угла *α*. Косинус острого угла α равен отношению прилежащего к углу *α* катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе. Синус острого угла

α равен отношению катета прямоугольного треугольника, противолежащего углу α, к его гипотенузе. Однако, в отличие от этих определений соотношение (П2-1) позволяет определять косинус и синус любого угла, а не только острого. В частности, пользуясь (П2-1) из геометрических соображений нетрудно доказать, что:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$$

Кроме того, по теореме Пифагора $|OM|^2 = x^2 + y^2 = 1$, и значит для любого угла α, выполняется так называемое **основное тригонометрическое тождество**:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 \equiv \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad \text{(П2-2)}$$

Если на луче OM отложить такую точку A, что $OA = f$, то каждая из координат точки A, очевидно, будет в f раз больше соответствующей координаты точки M, и, следовательно, проекции вектора $\vec{f} = \overrightarrow{OA}$ на оси x и y будут соответственно равны:

$$f_x = f\cos\alpha, f_y = f\sin\alpha. \qquad \text{(П2-3)}$$

Формула (П2-3) является основной для расчета проекций векторов на оси, если известен модуль вектора f и угол α между направлением вектора и положительным направлением оси Ox.

Наряду с функциями косинуса и синуса угла α часто используют функции тангенса ($tg\alpha$) и котангенса ($ctg\alpha$):

$$tg\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha, \quad ctg\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha. \qquad \text{(П2-4)}$$

Из формул (П2-2) и (П2-4) нетрудно получить следующие тригонометрические формулы:

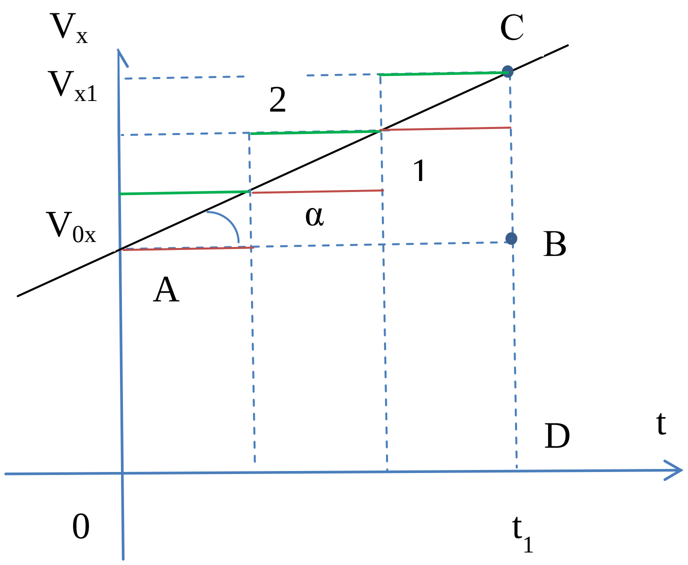
$$tg^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha, \quad ctg^2\alpha + 1 = 1/\sin^2\alpha.$$

Приложение 3. Вывод формулы для расчета изменения координаты тела по графику зависимости проекции его скорости от времени (на примере случая равноускоренного движения)

Разобьем интересующий нас промежуток времени (например, от нуля до t_1, как на рисунке) на несколько **равных** интервалов и рассмотрим две вспомогательные частицы, каждая из которых на каждом из этих интервалов времени движется с постоянной скоростью. Причем первая вспомогательная частица на каждом временном интервале движется с постоянной скоростью равной минимальной скорости рассматриваемой реальной частицы на этом интервале времени, а вторая – с постоянной скоростью равной максимальной скорости рассматриваемой реальной частицы на этом же интервале времени. В рассматриваемом примере равноускоренного движения с положительной проекцией ускорения это соответствует тому, что первая вспомогательная частица на каждом временном интервале движется с постоянной скоростью равной скорости рассматриваемой реальной частицы в начале этого интервала времени, а вторая – в конце. График проекции скорости реальной частицы изображен на рисунке черным цветом, первой вспомогательной частицы – красным цветом, второй вспомогательной – зеленым цветом. Поскольку при равномерном движении изменение координаты тела (проекция его перемещения на соответствующую ось) равно произведению проекции скорости на время движения, то достаточно очевидно, что изменение координат первого и второго вспомогательных тел будет равно:

$$x_1(t_1) - x_1(0) = X_0 S_1,$$
$$x_2(t_1) - x_2(0) = X_0 S_2,$$

где $X_0 = V_0 \tau_0$ – масштаб изменения координаты, соответствующий данному графику проекции скорости (при указанных значениях V_0 и τ_0, $X_0 = 50\,м/см^2$), S_1 – площадь фигуры, ограниченной осью времени, красными горизонтальными отрезками и перпендикулярами, опущенными из концов красных отрезков на ось времени, а S_2 – площадь фигуры, ограниченной осью времени, зелеными горизонтальными отрезками и перпендикулярами, опущенными из концов зеленых отрезков на ось времени. С другой стороны, очевидно, что:



1) при любом разбиении промежутка времени от 0 до t_1 на интервалы реальное тело всегда будет проходить меньше второго вспомогательного тела и больше первого;

2) по мере увеличения числа интервалов разбиения (и уменьшения их величины) площадь S_1 монотонно увеличивается, площадь S_2 монотонно уменьшается, причем величины обеих площадей все более приближаются к площади S трапеции *OACD*, а движение вспомогательных тел все меньше отличается друг от друга и от движения реального тела.

Отсюда следует, что изменение координаты X реального тела можно вычислить по формуле:

$$x(t_1) - x(0) = X_0 S, \qquad \text{(П3-1)}$$

где S – площадь трапеции *OACD*. Подчеркнем, что в общем случае движения с отрицательной проекцией скорости, площадь следует считать алгебраической величиной: она считается положительной, если соответствующий участок графика скорости лежит выше оси времени и отрицательной в противном случае. Полностью аналогично можно доказать формулу (П3-1) и для движения с переменным ускорением. В этом случае величина S в (П3-1) равна алгебраической площади, ограниченной осью времени, графиком проекции скорости и двумя вертикальными отрезками, проведенными к оси времени из точек графика скорости, соответствующих началу и концу рассматриваемого промежутка времени. Заметим также, что с математической точки зрения правая часть (П3-1) равна определённому интегралу от проекции мгновенной скорости на соответствующем интервале времени.