3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

8 класс

1. Можно ли в таблице 4×4 расставить 16 чисел (не все из которых нули) так, чтобы сумма чисел в любой вертикали, горизонтали и диагонали равнялась нулю. (Таблица имеет 14 диагоналей, включая состоящие из трёх, двух и одной клеток.)

Ответ: Можно.

Решение.

0	a	-a	0
-a	0	0	a
a	0	0	-a
0	-a	a	0

2. Тетя Полли удобно устроилась в кресле за чаем и читает газету. К ней подбегает Том Сойер и с любопытством заглядывает в газету сверху вниз. Том заметил, что цифры 0, 1 и 8 выглядят как обычно, 6 и 9 превратились друг в друга, а остальные цифры стали бессмысленными значками. Тетя Полли спросила Тома, сколько девятизначных чисел не изменят свой вид, если посмотреть на них сверху вниз? Помогите Тому Сойеру ответить на этот вопрос.

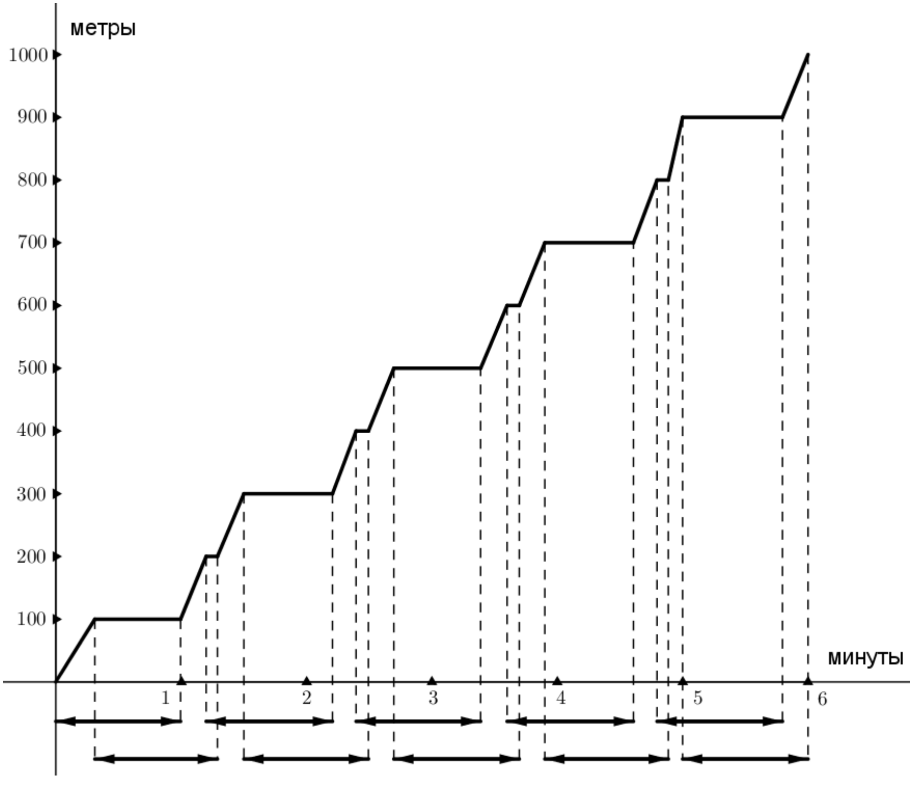
Ответ: 1500.

Решение. Все числа, удовлетворяющие условию, определяются первыми пятью своими цифрами. Заметим, что пятая цифра не может быть 6 или 9, а также первая цифра не может быть равна 0. Итак, для первой цифры имеем 4 варианта, для второй, третьей и четвёртой — по 5, а для пятой — 3 варианта. Таким образом, всего таких чисел $4 \cdot 5^3 \cdot 3 = 1500$.

3. Несколько представителей антидопингового агенства во главе с председателем внимательно следили за биатлонистом в течение 6 минут. Каждый представитель следил за биатлонистом ровно минуту, причём в любой момент времени за биатлонистом хотя бы кто-нибудь наблюдал. В отчёте каждый из них указал, что биатлонист проехал 100 метров. Председатель антидопингового агенства следил за биатлонистом все 6 минут и в отчёте написал, что биатлонист проехал 1000 метров за эти 6 минут. Могли ли они все оказаться правы?

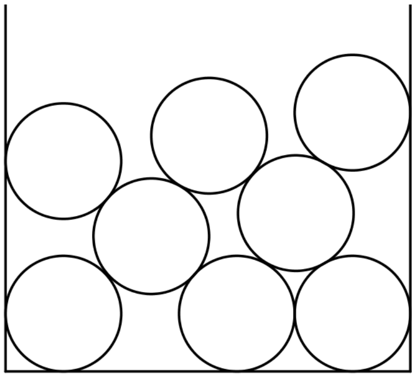
Ответ: Могли.

Решение. График движения биатлониста приведён ниже.

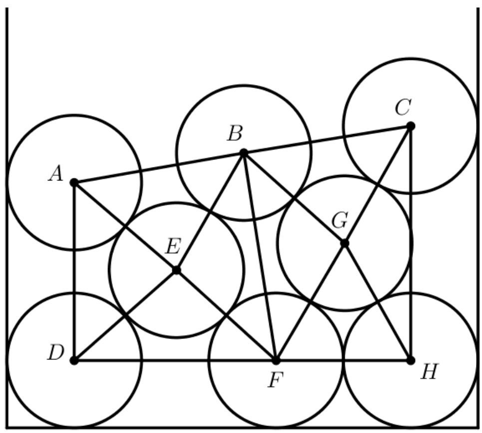


Замечание. Несложно доказать, что если за каждую минуту биатлонист проезжает не больше 100 метров, то больше 1000 метров за 6 минут он проехать не мог.

4. Вася начал копить деньги на новый спиннер. Все накопленные деньги он складывает в прямоугольную коробочку. Пока что он накопил 8 пятаков. На дне коробки они лежат, как показано на рисунке (соседние пятаки касаются). Докажите, что центры трёх верхних монет лежат на одной прямой.



Решение. Обозначим центры монет, как указано на рисунке:



Поскольку все окружности имеют одинаковый радиус, то прямая AD параллельна боковой стороне коробки, а DF — дну коробки, поэтому $\angle ADE + \angle EDF = 90°$. Заметим, что $AE = ED = EF$ (и равны удвоенному радиусу окружности), откуда треугольники AED и DEF равнобедренные. Значит

$$\angle AED + \angle DEF = 180° - 2\angle ADE + 180° - 2\angle EDF = 180°,$$

поэтому точки A, E, F лежат на одной прямой. Аналогично точки C, G, F лежат на одной прямой. В треугольнике ABF

медиана BE рана половине стороны AF (поскольку длина BE также равна удвоенному радиусу), поэтому треугольник ABF — прямоугольный. Аналогично треугольник BCF прямоугольный, поэтому $\angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

5. Учитель выдал Пете и Васе два одинаковых набора карточек, на каждой карточке написана цифра от 0 до 9. Петя сложил из своих карточек число N, а Вася — число M. Оказалось, что $M + N = 10^{2018}$. Докажите, что M делится на 50.

Решение. *Лемма.* Числа M и N делятся на 5.

Доказательство. Если M оканчивается нулем, то все очевидно. Пусть последняя цифра числа M не 0, тогда и последняя цифра числа N — не 0. Рассмотрим число $N-1$, пусть оно заканчивается на цифру a. Набор цифр числа $N-1$ отличается от набора цифр числа N (а значит, и числа M) только в последней цифре a, а сумма $M + (N-1) = 9\ldots9$.

Заметим, что для каждого $k = 0, 1, \ldots, 9$ количество цифр k в числе M равно количеству цифр $9-k$ в числе $N-1$ (поскольку каждой цифре k числа M можно поставить в соответствие цифру числа $N-1$, стоящую в том же разряде). В частности, количество цифр $9-a$ в числе M равно количеству цифр a в числе $N-1$, а значит, на единицу больше количества цифр a в числе N. С другой стороны, количество цифр a в числе M равно количеству цифр $9-a$ в числе $N-1$. Таким образом, количество цифр $9-a$ в числе M на единицу больше количества этих цифр в числе $N-1$, а значит, $9-a = a+1$, откуда $a = 4$, то есть последняя цифра числа M — это 5. Лемма доказана.

Если число M не делится на 50, то одна из двух последних его цифр отлична от нуля. Если последняя цифра не равна нулю, то по доказанному выше и M, и N оканчиваются на 5. Следовательно, обозначив через M' и N' числа, получающиеся из M и N отбрасыванием последней цифры, получим $M' + N' = 9\ldots9$ (2017 девяток). Поскольку M' и N' состоят из одинакового набора цифр, то количество цифр k в них совпадают. С другой стороны, количество цифр k в числе M' равно количеству цифр $9-k$ в числе N', то есть в числе M' количества цифр k и $9-k$ равны. Следовательно, число M' должно состоять из чётного числа цифр. С другой стороны, сумма $M' + N'$ состоит из 2017 цифр, то есть M' состоит из нечётного числа цифр. Противоречие, следовательно, M делится на 10. Рассуждая аналогично, получим, что числа M' и N' делятся на 5, откуда M делится на 50.