3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

7 класс

1. Том Сойер поспорил с Бекки Тетчер на жевачку, что он начертит на песке квадратную таблицу 10×10 и разложит в каждую клетку таблицы камешки так, что в каждом столбце количество камней будет одинаково (в каждую клетку можно положить от 1 до 100 камней). Удастся ли Тому это сделать?

Ответ: Удастся.

Решение.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

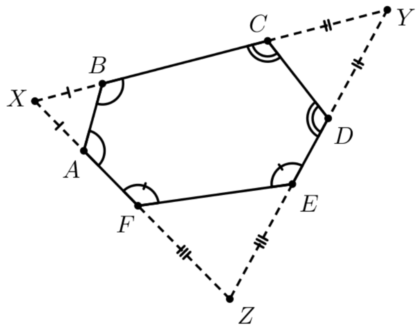
2. Учитель выдал Пете и Васе два одинаковых набора карточек, на каждой карточке написана цифра от 0 до 9. Петя сложил из всех своих карточек число N, а Вася из всех своих — число M. Может ли сумма чисел M и N равняться $\underbrace{99\ldots9}_{9999}$?

Ответ: Не может.

Решение. Рассмотрим последние цифры чисел M и N. Их сумма не может равняться 19, значит, она равна 9, и в следующий разряд единица не переносится. Поэтому сумма предпоследних цифр M и N тоже равна 9. Аналогично заключаем, что сумма цифр в каждом разряде равна 9. Следовательно, количества вхождений цифр a и $9-a$ в N совпадают, то есть всего в N чётное количество цифр. Противоречие.

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$, все углы которого тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам AB, CD, EF пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть прямые AF и BC пересекаются в точке X, BC и DE — в точке Y, DE и AF — в точке Z. Поскольку углы A и B шестиугольника равны, то равны углы XBA и XAB, то есть треугольник XAB — равнобедренный. Аналогично равнобедренными являются треугольники CYD и EZF. Тогда серединный перпендикуляр к отрезку AB совпадает с биссектрисой угла AXB. Аналогично серединные перпендикуляры к сторонам CD и EF совпадают с биссектрисами углов Y и Z треугольника XYZ. Но биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, откуда и следует утверждение задачи.



4. Учитель отобрал у Пети с Васей из второй задачи большую часть карточек, оставив по 6 карточек каждому, цифры на которых различны (но наборы карточек у Пети и Васи по-прежнему одинаковы). Оказалось, что Петя может составить из этих карточек число, кратное 37. Докажите, что Вася сможет составить из этих карточек другое число, кратное 37.

Решение. Пусть $A = \overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ — Петино число. Рассмотрим новое число B, поменяв местами a_1 и a_4. Тогда

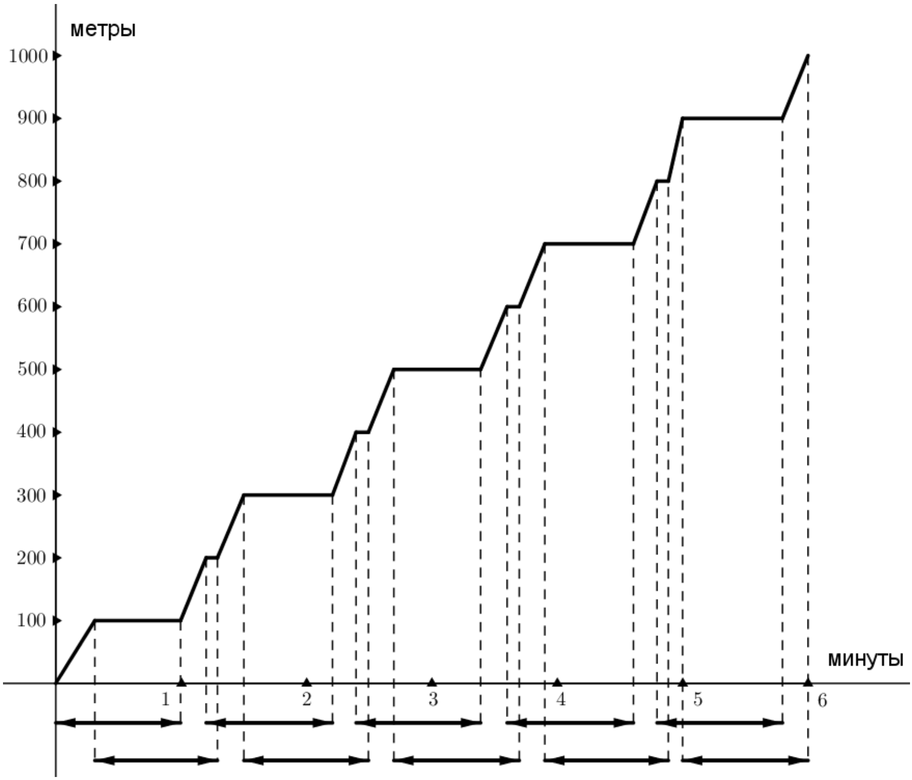
$$B-A = \overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}-\overline{a_6a_5a_1a_3a_2a_4} = \overline{a_400a_1}-\overline{a_100a_4} = (a_4-a_1)\cdot 999.$$

Поскольку $999 = 37 \cdot 27$, то $B - A$ делится на 37, откуда и B делится на 37.

5. Несколько представителей антидопингового агенства во главе с председателем внимательно следили за биатлонистом в течение 6 минут. Каждый представитель следил за биатлонистом ровно минуту, причём в любой момент времени за биатлонистом хотя бы кто-нибудь наблюдал. В отчёте каждый из них указал, что биатлонист проехал 100 метров. Председатель антидопингового агенства следил за биатлонистом все 6 минут и в отчёте написал, что биатлонист проехал 1000 метров за эти 6 минут. Могли ли они все оказаться правы?

Ответ: Могли.

Решение. График движения биатлониста приведён ниже.



Замечание. Несложно доказать, что если за каждую минуту биатлонист проезжает не больше 100 метров, то больше 1000 метров за 6 минут он проехать не мог.