Основные углы в пирамиде (часть 1)

Что бы работать с различными углами в пирамиде, полезно сначала разобрать базовые теоремы.

Теорема 1 (*теорема о трех косинусах*). Пусть α – величина угла между наклонной l и плоскостью π, β – величина угла между проекцией этой наклонной и прямой BC, проведенной через ее основание в плоскости π, и γ – величина угла между наклонной l и прямой BC. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

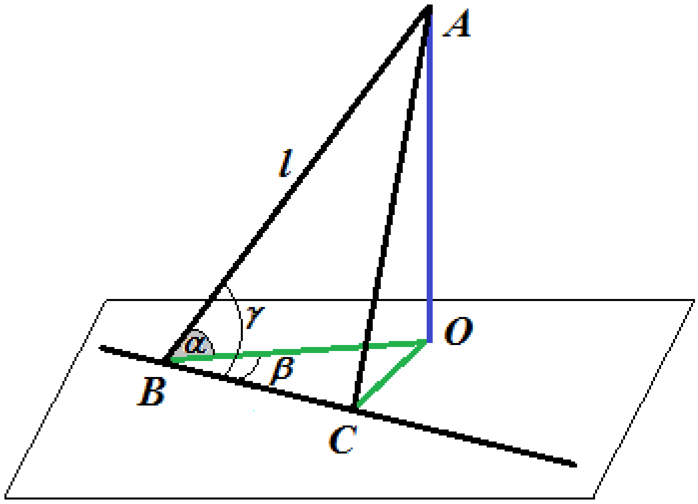

Рис. 1

Доказательство. Пусть AB – наклонная к плоскости π, $AO \perp \pi$, BO – проекция наклонной на плоскость π, BC – прямая, проведенная через основание наклонной в плоскости π (рис. 1). Тогда $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$.

1) Проведем $OC \perp BC$, соединим точки A и C, тогда по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp BC$.

Получили три прямоугольных треугольника, не лежащих в одной плоскости, каждый из которых содержит по данному острому углу. И у каждых двух треугольников есть общая сторона (рис. 2). Воспользуемся этим фактом.

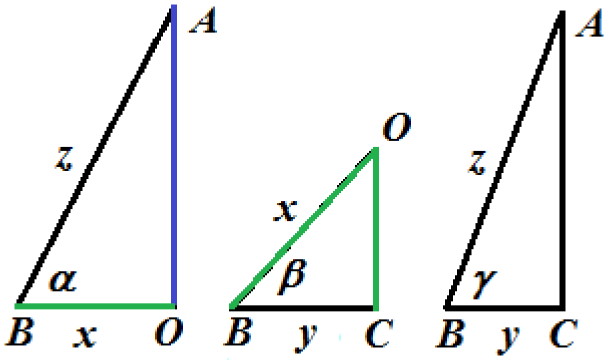

Рис. 2

2) Пусть $BO = x$, $BC = y$, $AB = z$ тогда

$$\frac{x}{z} = \cos\alpha, \frac{y}{x} = \cos\beta, \frac{y}{z} = \cos\gamma.$$

Подставляя из первых двух равенств значения z и y в последнее, получаем что

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Замечание. Эта зависимость справедлива и в том случае, если прямая a в плоскости π не проходит через основание наклонной, а пересекает ее проекцию. В этом случае γ – угол между скрещивающимися прямыми.

Задача. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

Решение. Пусть $\angle D_1AD = \alpha$ и $\angle C_1DC = \beta$. Проведем в грани AA_1B_1B диагональ AB_1. Диагональ AD_1 является наклонной к плоскости AA_1B_1, AA_1 – ее проекция и AB_1 – прямая, лежащая в плоскости проекции, $\angle B_1AD_1$ – искомый угол. Очевидно, что

$$\angle A_1AD_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ и } \angle A_1AB_1 = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Тогда на основании теоремы 1 имеем:

$$\cos\angle B_1AD_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

или

$$\cos\angle B_1AD_1 = \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Ответ: $arccos\ (\sin\alpha\cdot\sin\beta)$.

Теорема 2. Доказать, что для того, чтобы проекция прямой, проведенной через вершину угла (меньшего 180°), вне его плоскости явилась биссектрисой данного угла, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая составляла со сторонами этого угла равные острые углы.

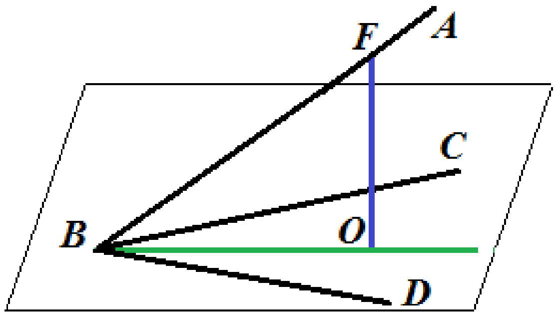

Рис. 3

Доказательство. *Достаточность*. Пусть прямая AB, проходящая через вершину B угла CBD, лежащего в плоскости α, составляет со сторонами данного угла равные углы (рис. 3). Положим $\angle ABC = \angle ABD = \gamma$. Из произвольной точки F луча BA опустим перпендикуляр FO на плоскость α и проведем луч BO.

Пусть $\angle FBO = \alpha$, $\angle CBO = \beta_1$, $\angle DBO = \beta_2$. По условию не трудно доказать, что $0° < \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma < 90°$.

Пользуясь теоремой 1, имеем

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta_1, \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta_2.$$

Тогда $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$ или $\beta_1 = \beta_2$, т.е. луч BO – биссектриса угла CBD.

Необходимость. Пусть BO – биссектриса угла CBD. Пусть

$$\angle CBO = \angle DBO = \beta, \qquad \angle ABO = \alpha, \qquad \angle ABC = \gamma_1, \qquad \angle ABD = \gamma_2.$$

Пользуясь теоремой 1 получаем:

$$\cos\gamma_1 = \cos\alpha\cos\beta, \cos\gamma_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

Тогда $\gamma_1 = \gamma_2$, что и требовалось доказать.

Теорема 3 (*теорема о трех синусах*). В одной из граней двугранного угла, величина которого равна α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть γ – угол, который эта прямая образует с другой гранью (рис. 4), тогда верно следующее соотношение:

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

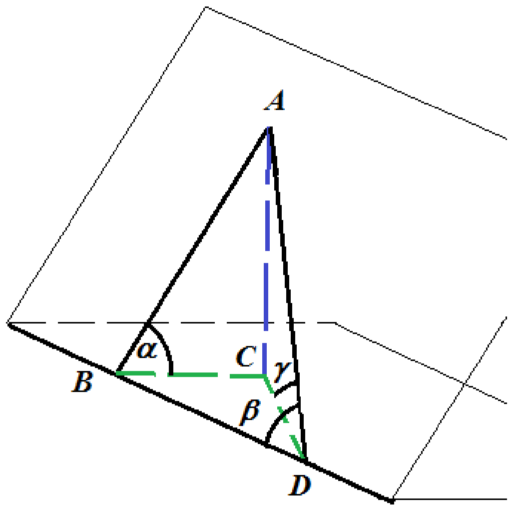

Рис. 4

Доказательство. Пусть $\angle ABC = \alpha$ – линейный угол двугранного угла, грани которого обозначим π и δ; AD – данная в условии прямая, $AD \subset \pi$, $\angle ADB = \beta$. По теореме о трех перпендикулярах $AC \perp \sigma$ и $\angle ADC$ – искомый.

Опять получили три прямоугольных треугольника, не лежащих в одной плоскости, каждый из которых содержит по данному острому углу. Воспользуемся этим фактом для вывода формулы.

Обозначим $AD = x$ и $\angle ADC = \gamma$, тогда

$$AB = x\sin\beta \text{ из } \Delta ABD,$$
$$AC = x\sin\gamma \text{ из } \Delta ADC,$$
$$AC = AB\sin\alpha = x\sin\beta\sin\alpha \text{ из } \Delta ABC.$$
Сравнивая последние две строчки, получаем требуемое.

Задача. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ и некоторой плоскостью π равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найти угол между стороной AD и данной плоскостью.

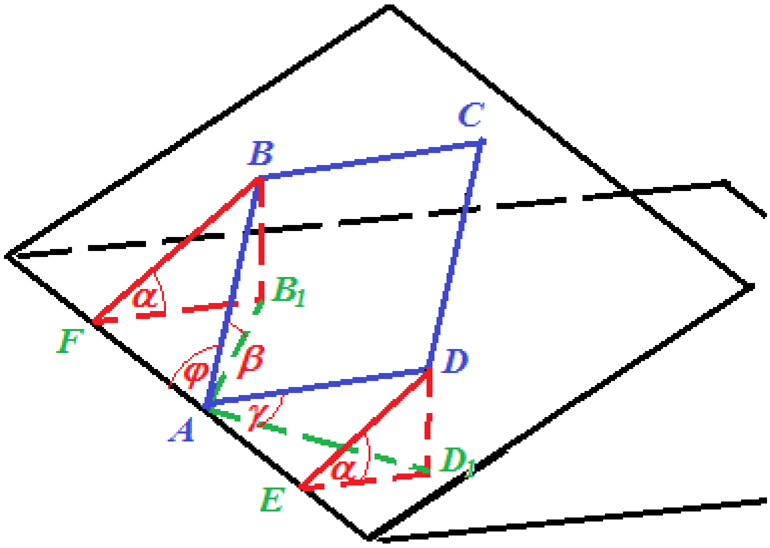

Рис. 5

Решение. Плоскость квадрата $ABCD$ образует с нижней плоскостью двугранный угол (рис. 5), величина которого по условию равна α. Будем считать, что вершина квадрата A находится на ребре этого двугранного угла (если нет, то это всегда легко сделать параллельным переносом без потери для условий задачи).
Тогда $\angle BFB_1 = \angle DED_1 = \alpha$.
Отрезки B_1A и D_1A – проекции сторон AB и AD на нижнюю плоскость. По условию $\angle BAB_1 = \beta$.

Пусть $\angle BAF = \varphi$ и $\angle DAD_1 = \gamma$. Требуется найти γ. Применим теорему о трех синусах к стороне AB: $\sin\beta = \sin\alpha\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, тогда можно найти его косинус, т.е. $\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.
Очевидно, что $\angle DAE = 90° - \varphi$, тогда по теореме о трех синусах для прямой AD, получаем:
$$\sin\gamma = \sin\alpha\sin(90° - \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi = \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$
Ответ. $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

Теорема 4 (*терема косинусов для трехгранного угла*). Для трехгранного угла (рис. 6), плоские углы которого равны α, β, γ и двугранный угол при ребре, противолежащем плоскому углу γ, равен φ, имеет место следующая зависимость:
$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$
Доказательство. Проведем два перпендикуляра: A_1C_1 и B_1C_1 к прямой SC. Пусть $SC_1 = x$, тогда из треугольника SB_1C_1 получим
$$SB_1 = \frac{x}{\cos\alpha}, B_1C_1 = xtg\alpha,$$
а из треугольника SA_1C_1 получим
$$SA_1 = \frac{x}{\cos\beta}, A_1C_1 = xtg\beta.$$
По теореме косинусов из треугольника SA_1B_1
$$A_1B_1^2 = \frac{x^2}{\cos^2\alpha} + \frac{x^2}{\cos^2\beta} - 2\frac{x^2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta};$$
а из треугольника $A_1B_1C_1$
$$A_1B_1^2 = x^2tg^2\alpha + x^2tg^2\beta - 2x^2tg\alpha tg\beta\cos\varphi$$

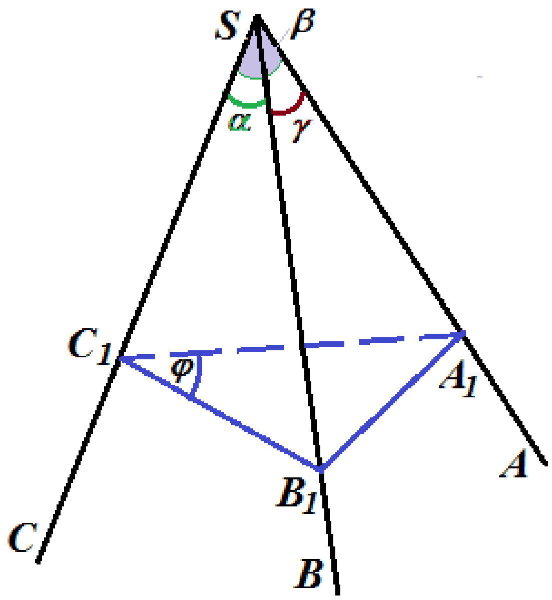

Рис. 6

Приравнивая последние два равенства, получим:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - 2\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} =$$
$$= tg^2\alpha + tg^2\beta - 2tg\alpha tg\beta\cos\varphi$$

учитывая, что $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$, получим

$$1 - \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = -\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Частный случай. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то соотношение принимает вид:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$$

– аналог теоремы Пифагора для трехгранных углов с прямым двугранным углом.