Критерии задач. Тур 3 9-10 класс

Задача 1

Если в двузначном числе, записанном в P-ичной системе счисления, поменять местами цифры, то оно увеличится в 4 раза. При каком минимальном значении P это может быть? Ответ обосновать.

# Критерии

Правильно написана программа для решения задачи, находящая ответ или математическое решение с обоснованием – 6 баллов. Ответ без обоснования – 2 балла. Неточности в обосновании с правильным ответом – 2...6 баллов.

**Ответ 9. (17, 71)**

# Решение

Код программы на Python:

p = 2
find = True
while find:
 for a in range(1, p):
 for b in range(p):
 if 4 \* (a \* p + b) == b \* p + a:
 print(a, b, p)
 find = False
 p += 1

Вначале мы записываем уравнение, которое должно выполняться исходя из условия, а затем просто перебираем все возможные системы счисления начиная с 2 и до тех пор, пока не найдём искомое число. Внутри этого цикла перебираются все возможные пары чисел для старшего и младшего разрядов, при этом старший разряд не может быть меньше единицы.

Математическое решение также опирается на это уравнение. Можно предположить, что одна из цифр минимальна, а другая максимальна (не забываем, что старший разряд не равен 0) – (1) и (p-1). Тогда получается квадратное уравнение, из которого следует, что система счисления не меньше, чем 9. Дальше остаётся найти ответ – 17­­9 и 719.

Задача 2

Составьте формулу, которая будет по номеру года (натуральному числу) определять количество дней в нем. Формула не может содержать условных конструкций, а только арифметические операции над номером года N и числовыми константами. Можно использовать операции +, −, \* (умножение), // (деление нацело), % (остаток от деления нацело).

# Критерии

Дана верная формула – 6 баллов. Дана формула учитывающая високосный год, но не учитывает 100 и 400 года – 4 балла. Используется вещественное деление («/») вместо целочисленного («//») – минус 1 балл. За ошибки в формуле – 0…4 балла.

**Ответ: например, f(x) = 365 + 1 // (k % 400 + 1) + 1 // (k % 4 + 1) - 1 // (k % 100 + 1)**

# Решение

Для решения данной задачи можно заметить, что нам нужно выводить 365 и добавлять единицу, если год високосный.

Википедия: «год является високосным в двух случаях: либо он кратен 4, но при этом не кратен 100, либо кратен 400. Год не является високосным, если он не кратен 4, либо он кратен 100, но при этом не кратен 400.»

Научимся прибавлять единицу, если год високосный. Для этого необходимо добавить такую функцию, которая в кратных четырём возвращала 1, а во всех остальных случаях – 0. Можно воспользоваться следующей идеей: если единицу целочисленно разделить на что-то, то всегда будет 0, кроме деления на 1. Тогда осталось придумать функцию, которая будет возвращать 1, если число кратно 4. Мы знаем, что остаток от деления будет равен 0, если число делится нацело. Тогда формула будет выглядеть так

$$(n \% 4) + 1$$

И формула, дающая 0 при всех некратных, будет такой:

$$1 // ((n \% 4) + 1)$$

Для високосного года без учёта 100 и 400 формула выглядит так:

$$365+1 // ((n \% 4) + 1)$$

А для учёта 100 достаточно заметить, что можно вычесть 1, если год кратен 100 и добавить 1, если кратен 4, тогда сумма останется равна 365, после этого останется добавить только кратность 400. Итоговая формула:

$$365+1 // ((n \% 4) + 1) -1 // ((n \% 100) + 1) +1 // ((n \% 400) + 1) $$

Задача 3

Пять одноклассников согласны пойти гулять при выполнении следующих условий:

1) Если А пойдет гулять, то и В сделает то же самое.

2) D или E точно пойдут гулять.

3) Из В и С кто-то пойдет гулять обязательно, но только один из них.

4) C и D или пойдут оба или оба не пойдут.

5) Если Е пойдет гулять, то и А, и D сделают то же.

Если все условия истинны, то кто пойдет гулять и почему? Попробуйте решить задачу наиболее эффективно.

# Критерии

Эффективное решение с обоснованием – 6 баллов. Неэффективное решение с правильным ответом (без формул) – 4 балла. Ошибки в решение – 0 баллов. Про кого-то из учеников есть неточные данные (может идти, а может и не идти) – 0 баллов.

**Ответ: CD**

# Решение

Данную задачу можно решить несколькими способами: либо написать программу, которая переберёт все возможные комбинации и выдаст правильный ответ, либо решив систему логических уравнений:

1. $A\rightarrow B$
2. $D or E$
3. $B xor C$
4. $C≡D$
5. $E\rightarrow AD$,

либо самостоятельно предположив какой-нибудь исход для переменной и придя к выводу, может она быть или нет (получается 2 случая).

Задача 4

Лента имеет 8 ячеек в длину. В ячейках содержатся числа: 14, 10, 20, 17, 6, 9, 25, 21 в этом порядке. Два игрока играют в следующую игру. За ход каждый игрок отрезает самое левое или самое правое число, добавляя его к своим очкам. Сколько очков первый игрок может получить гарантированно, если его оппонент тоже играет оптимально? Ответ обосновать.

# Критерии

Написана программа, верно решающая задачу или верно разобраны случаи с полным доказательством и верным ответом – 6 баллов. Не учтены некоторые случаи, но получен верный ответ – 4 балла. Разобран только случай с правильным ответом – 3 балла. Получена максимальная возможная сумма без учёта оптимальных ходов противника или любая другая – 0 баллов.

**Ответ: 65**

# Решение

Данную задачу можно решить с помощью программы. Для этого необходимо учитывать, что каждый игрок хочет получить наибольшую возможную сумму. Пример рекурсивной программы на языке Python.

def prob4\_2(arr):
 if len(arr) == 0:
 return 0
 return min(-arr[0] + prob4(arr[1:]), -arr[-1] + prob4(arr[:-1]))

def prob4(arr):
 if len(arr) == 0:
 return 0
 return max(arr[0] + prob4\_2(arr[1:]), arr[-1] + prob4\_2(arr[:-1]))

arr = [14, 10, 20, 17, 6, 9, 25, 21]
print(prob4(arr))

Здесь одна функция отвечает за первого игрока, а вторая – за второго. Каждый игрок хочет максимизировать свой выигрыш (у второго игрока цель набрать как можно меньше и он берёт отрицательными)

Задача 5

К слову “abracabra” можно применять операцию переворота любой ее подстроки, получая новые слова. Например, перевернув первые 4 буквы, мы получим “arbacabra”. Тот же результат будет, если перевернуть первую подстроку “br”. Затем операцию переворота можно повторять сколько угодно раз, применяя ее к различным подстрокам. Сколько различных слов мы при этом можем получить? Так, подобные операции над словом “abra” дают 12 различных слов. Ответ обосновать. Задачу можно решать как комбинаторно, так и с помощью программы, текст которой надо привести.

# Критерии

Получен правильный ответ с помощью программы или дан верный ответ с обоснованием – 6 баллов. Не доказано, что можно получить все возможные подстроки – минус 2 балла. Не обосновано использование формулы числа сочетаний – минус 2 балла. Не учтены все возможные перестановки (забыт один из элементов числа сочетаний) – минус 1 балл. Сложение, а не умножение чисел сочетания – минус 2 балла. Ответ не посчитан – минус 1 балл.

**Ответ: 3780**

# Решение

Решение в «лоб» с помощью программы:

def prob5(str):
 ans.add(str)
 hist = [str]
 ind = 0
 while ind < len(hist):
 s = hist[ind]
 for i in range(len(s)):
 for j in range(len(s)):
 new\_str = s[:j] + s[j: j + i][::-1] + s[j + i:]
 if new\_str not in ans:
 hist.append(new\_str)
 ans.add(new\_str)
 ind += 1

prob5('abracabra')

Также можно было заметить, что с помощью таких операций можно получить любую перестановку, например, мы умеем менять местами любые 2 элемента. Для этого надо перевернуть часть с границами в этих элементах, а затем перевернуть внутреннюю часть (вернув обратно внутренние элементы). Таким образом мы можем получить любую перестановку. После этого можно заметить, что если бы все буквы были бы различными, то первая буква могла бы встать на любое место (n вариантов). Вторая буква могла бы встать на любое из оставшихся мест и т. д. Итого $n!$ различных комбинаций, но у нас есть повторяющиеся буквы, тогда надо исключить все возможные повторения, которых – количество перестановок для каждой из этих букв.