3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

9 класс

1. На острове живут два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды эти племена сыграли между собой товарищеский матч по футболу, на который было приглашено 60 болельщиков. Всего за игру было забито 40 голов. После каждого из голов ровно один болельщик расстраивался и уходил со стадиона со словами "Теперь среди оставшихся болельщиков лжецов больше, чем рыцарей". Сколько рыцарей пришло на матч?

Ответ. 30.

Решение. Предположим, что изначально рыцарей было больше, чем лжецов. Тогда их было хотя бы 31, а лжецов — не более 29. Т.к. со стадиона ушло 40 болельщиков, а лжецов всего не более 29, то ушло несколько рыцарей. Рассмотрим первого из рыцарей, который покинул стадион. В этот момент среди оставшихся болельщиков рыцарей осталось хотя бы 30, а лжецов — не более 29. Значит, рыцарь солгал, получаем противоречие.

Аналогично, предположим, что изначально рыцарей было меньше, чем лжецов. Тогда их было не более 29, а лжецов — хотя бы 31. В процессе игры ушло несколько лжецов. Рассмотрим первого из лжецов, который покинул стадион. В этот момент среди оставшихся болельщиков рыцарей осталось не более 29, а лжецов — хотя бы 30. Значит, лжец сказал правду, получаем противоречие.

Следовательно, среди болельщиков рыцарей и лжецов изначально было поровну, по 30 человек.

Замечание. Легко показать, что сначала со стадиона ушёл рыцарь, потом лжец, потом рыцарь, потом лжец. Но не обязательно все 40 болельщиков будут так чередоваться: возможно, в какой-то момент начнут уходить представители только одного племени.

2. В стране несколько городов, некоторые пары из них соединены дорогами. Два города назовём *соседними*, если между ними проведена дорога. Обязательно ли можно каждому городу присвоить натуральное число так, чтобы среди двух чисел, присвоенных любым соседним городам, одно делилось на другое, а среди двух чисел, присвоенных любым не соседним городам, ни одно из них не делилось на другое?

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Пусть города стоят в вершинах правильного пятиугольника, а дорогами соединены только города, стоящие в соседних вершинах этого пятиугольника (всего 5 дорог).

Предположим, расставить числа, как описано в условии, возможно. Проведём на каждой дороге стрелку от меньшего числа к большему (если числа равны, проведём стрелку в любом направлении). Всего стрелок 5, и, очевидно, в какой-то город стрелка и входит, и выходит (иначе бы они чередовались, но их нечётное количество). Пусть в город N (с числом n) входит стрелка из города A (с числом a), и из города N выходит стрелка в город B (с числом b). Но тогда $b \,\vdots\, n$ и $n \,\vdots\, a$, откуда $b \,\vdots\, a$. Но A и B — не соседние города, противоречие.

3. Петя задумал действительное число t. Он заметил, что если взять наибольшее целое число, не превосходящее t, умножить его на 8, а затем вычесть 7, то получится квадрат исходного числа. Что мог задумать Петя?

Ответ. $1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$.

Решение. Пусть $[t]$ — наибольшее целое число, не превосходящее t. Из условия имеем уравнение $t^2 - 8[t] + 7 = 0$. Для любого t верно, что $[t]$ больше $t-1$ (т.к. на промежутке $(t-1, t]$ длины 1 найдётся целое число). Поэтому

$$t - 1 < [t] \leqslant t,$$

$$-8t \leqslant -8[t] \leqslant -8(t-1) = 8 - 8t,$$

$$t^2 - 8t + 7 \leqslant t^2 - 8[t] + 7 < t^2 - 8t + 15,$$

$$t^2 - 8t + 7 \leqslant 0 < t^2 - 8t + 15,$$

$$\begin{cases} t^2 - 8t + 7 \leqslant 0, \\ t^2 - 8t + 15 > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства $(t-1)(t-7) \leqslant 0$ является отрезок $[1, 7]$, а решением второго неравенства $(t-3)(t-5) > 0$ является множество $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$. Поэтому решением этой системы является объединение двух полуинтервалов $[1, 3) \cup (5, 7]$, на которых $[t]$ может принимать только значения $\{1, 2, 5, 6, 7\}$. Во всех этих случаях $[t] > 0$, поэтому и $t > 0$.

Случай 1. $[t] = 1$. Тогда $t^2 = 8[t] - 7 = 1$. Получаем решение $t = 1$.

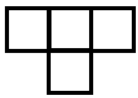
Случай 2. $[t] = 2$. Тогда $t^2 = 8[t] - 7 = 9$. Но $[3] = 3$, и решений в этом случае нет.

Случай 3. $[t] = 5$. Тогда $t^2 = 8[t] - 7 = 33$. Т.к. $[\sqrt{33}] = 5$, получаем ещё одно решение.

Случай 4. $[t] = 6$. Тогда $t^2 = 8[t] - 7 = 41$. Т.к. $[\sqrt{41}] = 6$, получаем ещё одно решение.

Случай 5. $[t] = 7$. Тогда $t^2 = 8[t] - 7 = 49$. Получаем решение $t = 7$.

4. Клетки таблицы 2018×2018 раскрашены в 4 цвета. Рассмотрим все способы размещения внутри этой таблицы Т-тетраминошки (см. рис., фигурку можно поворачивать). Докажите, что Т-тетраминошка содержит клетки четырёх разных цветов менее чем в 51% из этих способов.



Решение. 5-клеточную фигуру, состоящую из клетки и 4 соседних с ней по стороне, назовём *крестом*. Всего крестов в таблице 2018×2018 ровно 2016^2 (т.к. выбрать центральную для него клетку можно любую, не примыкающую к границе, а их 2016^2). Заметим, что в каждом таком кресте найдутся 2 одноцветные клетки (все 5 разноцветными оказаться не могут). Легко понять, что среди четырёх возможных размещений Т-тетраминошки внутри этого креста разноцветных не более двух.

Т-тетраминошка может либо содержаться в одном из крестов, либо примыкать к границе таблицы по трём клеткам. Таким образом, всего возможных размещений существует ровно $4 \cdot 2016^2 + 4 \cdot 2016$, и среди них не более $2 \cdot 2016^2 + 4 \cdot 2016$ разноцветных. Осталось проверить неравенство

$$2 \cdot 2016^2 + 4 \cdot 2016 < 0,51 \cdot (4 \cdot 2016^2 + 4 \cdot 2016),$$

$$0,49 \cdot 4 \cdot 2016 < 0,04 \cdot 2016^2 \quad \Leftrightarrow \quad 49 < 2016,$$

что верно, откуда и следует требуемое.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая AI пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Известно, что $\angle BIC = 120^\circ$, $ID = \frac{7}{\sqrt{3}}$ и $BC - AB = 2$. Найдите AI.

Ответ. $2\sqrt{3}$.

Решение. Точка I является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC, а точка D лежит на пересечении биссектрисы угла A с описанной окружностью. Точка D является серединой дуги BC, и поэтому равноудалена от точек B и C.

Заметим, что $120^\circ = \angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$, откуда $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle DBC = \angle DAC = 30^\circ$ (т.к. оба этих угла опираются на дугу DC).

Заметим, что $\angle DBI = \angle CBI + 30^\circ$ и $\angle DIB = \angle ABI + 30^\circ$ (как внешний для треугольника ABI). BI — биссектриса угла B, поэтому $\angle DBI = \angle DIB$, и $DB = DI = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Пусть K — середина стороны BC. Прямые DK и BC перпендикулярны, т. к. треугольник BDC — равнобедренный. В прямоугольном треугольнике BDK гипотенуза BD равна $\frac{7}{\sqrt{3}}$, а острый угол DBK равен 30°, поэтому $BK = BD \cdot \cos 30^\circ = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2}$. Следовательно, $BC = 2BK = 7$, а $AB = BC - 2 = 5$.

Пусть $AI = x$. По теореме косинусов в треугольнике ABD имеем $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$, откуда получаем квадратное уравнение

$$\frac{49}{3} = 25 + (\frac{7}{\sqrt{3}} + x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (\frac{7}{\sqrt{3}} + x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим уравнение

$$x^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2\sqrt{3})(x + \frac{5}{\sqrt{3}}) = 0.$$

Единственный положительный корень уравнения — это $x = 2\sqrt{3}$.