

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

10 класс

1. В строчку написано несколько различных чисел, причём любые два соседних различаются не больше, чем на 100. Их упорядочили по возрастанию слева направо. Докажите, что по-прежнему любые два соседних числа различаются не больше, чем на 100.

2. Вася задумал натуральное число, большее 10, в десятичной записи которого все цифры одинаковы. Докажите, что Васино число не является квадратом натурального числа.

3. Найдите площадь фигуры на плоскости, образованной всеми точками, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

$$\left| y - \frac{x^2}{2} \right| + \left| y + \frac{x^2}{2} \right| \leq 2 + x.$$

4. Петя выписывает все возможные 2018-буквенные слова, состоящие только из букв "а", "б" и "в" (слово — это последовательность букв, не обязательно осмысленная; в слове не обязательно использовать все буквы). В скольких из них буква "а" встречается чётное количество раз?

5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки K, L, M, N — середины его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $\angle ANO = \angle BLO$ тогда и только тогда, когда $\angle BKO = \angle CMO$.