3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

10 класс

1. В строчку написано несколько различных чисел, причём любые два соседних различаются не больше, чем на 100. Их упорядочили по возрастанию слева направо. Докажите, что по-прежнему любые два соседних числа различаются не больше, чем на 100.

Решение. Предположим, после упорядочивания какие-то два соседних числа различаются больше, чем на 100. Назовём их m и M, $m + 100 < M$. Назовём числа, не превосходящие m, *маленькими*, а числа, бóльшие M, *большими*. По предположению, каждое число — либо маленькое, либо большое. Также очевидно, что разность между большим и маленьким числом всегда больше 100.

Найдём m и M в исходной строчке. Не нарушая общности, m находится левее M (иначе строчку можно перевернуть, читая с другого конца). На отрезке между m и M находится несколько чисел. Самое левое из них (m) — маленькое, самое правое из них (M) — большое. Тогда найдётся пара двух соседних чисел, левое из которых является маленьким, а правое — большим (иначе справа от любого маленького числа всегда находится маленькое, и тогда больших чисел вообще не будет). Но по условию разность между ними не превосходит 100, противоречие.

2. Вася задумал натуральное число, большее 10, в десятичной записи которого все цифры одинаковы. Докажите, что Васино число не является квадратом натурального числа.

Решение. Предположим, Васино число является квадратом натурального числа.

Квадраты чётных чисел $(2s)^2 = 4s^2$ при делении на 4 дают остаток 0, а квадраты нечётных чисел $(2s+1)^2 = 4(s^2+s)+1$ при делении на 4 дают остаток 1.

Пусть Васино число состоит из m цифр k, и оно равно $\underbrace{\overline{kk\ldots kkk}}_{m}$. Распишем его как $\underbrace{\overline{kk\ldots kkk}}_{m-2} \cdot 100 + \overline{kk} = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{\overline{kk\ldots kkk}}_{m-2} + \overline{kk}$, при делении на 4 даёт тот же остаток, что и число $\overline{kk}$. Среди чисел 11, 22, 33, …, 99 (очевидно, $k \neq 0$) только числа 33, 44, 77 и 88 при делении на 4 дают остаток 0 или 1 (следовательно, при других k точным квадратом число не будет). Поэтому $k \in \{3, 4, 7, 8\}$.

С другой стороны, квадраты натуральных чисел могут заканчиваться только на цифры $0, 1, 4, 5, 6, 9$ (квадраты чисел, оканчивающихся на 1 или 9, оканчиваются на 1; квадраты чисел, оканчивающихся на 2 или 8, оканчиваются на 4; квадраты чисел, оканчивающихся на 3 или 7, оканчиваются на 9; квадраты чисел, оканчивающихся на 4 или 6, оканчиваются на 6; квадраты чисел, оканчивающихся на 0, оканчиваются на 0; квадраты чисел, оканчивающихся на 5, оканчиваются на 5). Поэтому $k \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Следовательно, k может быть равно только 4. Тогда Васино число чётно, и поэтому является квадратом чётного числа. Следовательно, $\underbrace{\overline{44\ldots444}}_{m} = (2s)^2$, откуда $\underbrace{\overline{11\ldots111}}_{m} = s^2$. Но по уже доказанному квадрат натурального числа не может состоять из одних единиц, противоречие.

3. Найдите площадь фигуры на плоскости, образованной всеми точками, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

$$\left|y - \frac{x^2}{2}\right| + \left|y + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant 2 + x\,.$$

Ответ. $7{,}5$.

Решение. Из очевидного неравенства $|a| + |b| \geqslant |a + b|$ следует, что

$$2 + x \geqslant \left|\frac{x^2}{2} + y\right| + \left|\frac{x^2}{2} - y\right| \geqslant x^2.$$

Неравенство $2+x \geqslant x^2$ равносильно неравенству $(x-2)(x+1) \leqslant 0$, которое в свою очередь равносильно условию $x \in [-1; 2]$.

Ясно, что если точка (x, y) принадлежит фигуре, то и точка $(x, -y)$ также принадлежит фигуре. Поэтому достаточно найти площадь верхней половины фигуры (точки, чьи ординаты неотрицательны) и умножить её на 2. Если $y \geqslant 0$, то $2 + x = |y + \frac{x^2}{2}| + |y - \frac{x^2}{2}| \geqslant |y + y| = 2y$, откуда $y \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.

Итак, множество точек верхней половины фигуры ограничено четырьмя прямыми $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1 + \frac{x}{2}$. Проверим, что все точки, принадлежащие полученной прямоугольной трапеции, удовлетворяют изначальному условию.

Если $\frac{x^2}{2} - y \geqslant 0$, то

$$\left|\frac{x^2}{2} + y\right| + \left|\frac{x^2}{2} - y\right| = \frac{x^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} - y = x^2 \leqslant 2 + x\,.$$

Если $\frac{x^2}{2} - y \leqslant 0$, то

$$\left|\frac{x^2}{2} + y\right| + \left|\frac{x^2}{2} - y\right| = \frac{x^2}{2} + y + y - \frac{x^2}{2} = 2y \leqslant 2\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 2 + x\,.$$

Полученные четыре прямые ограничивают верхнюю половину искомой фигуры. Эта половина — прямоугольная трапеция с вершинами в координатах $(-1,0), (-1,\frac{1}{2}), (2,2), (2,0)$, и по формуле её площади получаем $\dfrac{3\cdot(\frac{1}{2}+2)}{2} = \dfrac{15}{4}$. Умножая это на 2, получаем ответ 7,5.

4. Петя выписывает все возможные 2018-буквенные слова, состоящие только из букв "а", "б" и "в" (слово — это последовательность букв, не обязательно осмысленная; в слове не обязательно использовать все буквы). В скольких из них буква "а" встречается чётное количество раз?

Ответ. $\dfrac{3^{2018}+1}{2}$.

Решение 1. Пусть f_n и g_n — количество n-буквенных слов, содержащих чётное и нечётное количество букв "а" соответственно. Очевидно, что n-буквенных слов ровно $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^n$. Заметим, что каждое n-буквенное слово с чётным количеством букв "а" получается либо приписыванием справа буквы "б" или "в" к $n-1$-буквенному слову с чётным количеством букв "а", либо приписыванием справа буквы "а" к $n-1$-буквенному слову с нечётным количеством букв "а". Поэтому $f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1} = f_{n-1} + (f_{n-1} + g_{n-1}) = f_{n-1} + 3^{n-1}$ для всех n. Следовательно,

$$f_{2018} = f_{2017} + 3^{2017} = f_{2016} + 3^{2016} + 3^{2017} = \ldots =$$

$$= f_0 + 1 + 3 + \ldots + 3^{2017} = 1 + \frac{3^{2018}-1}{2} = \frac{3^{2018}+1}{2}.$$

Решение 2. Будем использовать числа сочетаний и бином Ньютона. Количество 2018-буквенных слов, в которых ровно k букв "а", равно $C_{2018}^{k} \cdot 2^{2018-k}$. Поэтому разность между количеством слов с чётным количеством букв "а" и с нечётным равна

$$1 - C_{2018}^{2017} \cdot 2^1 + C_{2018}^{2016} \cdot 2^2 - \ldots = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^{2018-k}(-2)^k = (1-2)^{2018} = 1.$$

Т.к. $f_{2018} = g_{2018} + 1$, а всего слов $f_{2018} + g_{2018} = 3^{2018}$, то $f_{2018} = \dfrac{3^{2018}+1}{2}$.

5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки K, L, M, N — середины его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $\angle ANO = \angle BLO$ тогда и только тогда, когда $\angle BKO = \angle CMO$.

Решение. Для начала докажем две вспомогательных леммы.

Лемма 1. Даны два треугольника PQR и $P_1Q_1R_1$, в которых проведены медианы QS и Q_1S_1. Тогда подобие треугольников PQR и $P_1Q_1R_1$ равносильно подобию треугольников PQS и $P_1Q_1S_1$.

$\Rightarrow$. Пусть $\triangle PQR \sim \triangle P_1Q_1R_1$. Тогда $\angle Q = \angle Q_1$ и $\frac{PQ}{PR} = \frac{P_1Q_1}{P_1R_1}$. Т.к. $PS = \frac{PR}{2}$ и $P_1S_1 = \frac{P_1R_1}{2}$, имеем $\frac{PQ}{PS} = \frac{P_1Q_1}{P_1S_1}$. Тогда $\triangle PQS \sim \triangle P_1Q_1S_1$ по отношению двух сторон и углу между ними.

$\Leftarrow$. Пусть $\triangle PQS \sim \triangle P_1Q_1S_1$. Тогда $\angle Q = \angle Q_1$ и $\frac{PQ}{PS} = \frac{P_1Q_1}{P_1S_1}$. Т.к. $PR = 2PS$ и $P_1R_1 = 2P_1S_1$, имеем $\frac{PQ}{PR} = \frac{P_1Q_1}{P_1R_1}$. Тогда $\triangle PQR \sim \triangle P_1Q_1R_1$ по отношению двух сторон и углу между ними.

Лемма 2. Вписанность четырёхугольника $ABCD$ равносильна как подобию треугольников AOD и BOC, так и подобию треугольников AOB и DOC.

Достаточно доказать равносильность подобию треугольников AOD и BOC, с подобием двух других треугольников всё аналогично.

$\Rightarrow$. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Тогда $\angle ACB = \angle ADB$ (как опирающиеся на дугу AB) и $\angle CAD = \angle CBD$ (как опирающиеся на дугу CD). Тогда $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ по двум углам.

$\Leftarrow$. Пусть $\triangle AOD \sim \triangle BOC$. Тогда $\angle ACB = \angle ADB$, откуда из критерия вписанности четырёхугольника следует требуемое.

Итак, леммы доказаны. Перейдём теперь к решению задачи.

Докажем, что каждое из условий равносильно вписанности четырёхугольника $ABCD$, отсюда будет следовать требуемое. Для этого докажем, что условие $\angle ANO = \angle BLO$ равносильно подобию треугольников AOD и BOC (условие $\angle BKO = \angle CMO$ аналогичным образом будет равносильно подобию треугольников AOB и DOC).

Пусть точка O' на луче NO такова, что $\angle O'AN = \angle OBL$. Тогда $\triangle O'AN \sim \triangle OBL$ по двум углам, и, следовательно, по лемме 1 $\triangle O'AD \sim \triangle OBC$. Тогда $\angle AO'D = \angle BOC = \angle AOD$, следовательно, точки O и O' совпадают. В обратную сторону, из подобия треугольников AOD и BOC из леммы 1 следует подобие $\triangle ANO \sim \triangle BLO$, откуда $\angle ANO = \angle BLO$.