2 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

10 класс

1. Натуральное число N больше 10^{2017}, и притом делится на 99. Какая наименьшая сумма цифр у него может быть?

Ответ. 18.

Решение. Из условия следует, что N делится на 9 и на 11. Пусть S_1 — его сумма цифр на нечётных местах, S_2 — сумма цифр на чётных местах, $S = S_1 + S_2$ — его общая сумма цифр. Воспользовавшись признаками делимости на 9 и на 11, получаем, что $S = S_1 + S_2$ делится на 9 (поэтому она или 9, или хотя бы 18), а $S_1 - S_2$ делится на 11. Но если бы $S_1 + S_2$ было равно 9, то $S_1 - S_2$ не делилось бы на 11 (все возможные варианты $9-0, 8-1, 7-2, \ldots, 1-8, 0-9$ не делятся на 11). Поэтому $S \geqslant 18$.

Значение $S = 18$ достигается, например, при $N = 9000\ldots0009$ (10000 нулей). Очевидно, что такое N делится и на 9, и на 11.

2. Каково наименьшее возможное значение выражения

$$13a^2 - 12ab - 18a + 5b^2 - 14b + 69,$$

если a и b — действительные числа?

Ответ. 7.

Решение. Заметим, что значение выражения

$$13a^2 - 12ab - 18a + 5b^2 - 14b + 69 = (b-5)^2 + (2a-6)^2 + (3a-2b+1)^2 + 7$$

не меньше 7, т.к. каждый из квадратов — число неотрицательное. При этом значение 7 достигается, когда каждый квадрат равен 0 — это возможно при $a = 3$ и $b = 5$.

3. У Пети в руках стандартная колода из 52 игральных карт (четыре двойки, четыре тройки, ... , четыре туза). Сколькими способами он может выбрать из неё четыре карты, любые две из которых разной масти и разного достоинства?

Ответ. 17160.

Решение. Первой Петя может выбрать любую из 52 карт. Тогда в качестве следующей он уже не сможет выбрать 3 карты того же достоинства и 12 карт той же масти, что и первая выбранная карта. Поэтому выбрать вторую карту он сможет $52-1-3-12=36$ способами. Выбрать третью карту по аналогии он сможет 22 способами, а последнюю — всего 10 способами. Перемножив эти 4 числа и поделив полученное произведение на 4! (неважно, какая из карт была выбрана первой, какая — второй, и т.д.), получаем ответ $\frac{52\cdot36\cdot22\cdot10}{4!}=17160$.

4. У квадратного уравнения $x^2+kx+l=0$ оба корня — натуральные числа. Известно, что $l+2k=97$. Найдите l.

Ответ. 309.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — натуральные корни этого уравнения. По теореме Виета имеем $-k=(x_1+x_2)$, а $l=x_1x_2$. Тогда

$$97=l+2k=x_1x_2-2(x_1+x_2)=x_1x_2-2x_1-2x_2,$$

$$101=x_1x_2-2x_1-2x_2+4=x_1(x_2-2)-2(x_2-2)=(x_1-2)(x_2-2).$$

Каждая из скобок является целым числом, и произведение этих скобок равно простому числу 101. Поэтому эти скобки равны либо 1 и 101, либо -1 и -101.

Случай 1. Если x_1-2 и x_2-2 равны -1 и -101, то x_1 и x_2 равны 1 и -99. Но -99 — не натуральное число.

Случай 2. Если x_1-2 и x_2-2 равны 1 и 101, то x_1 и x_2 равны 3 и 103. Тогда $k=-(x_1+x_2)=-106$, $l=x_1x_2=309$.

5. 24 точки, находящиеся в трёхмерном пространстве, таковы, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Для каждых трёх из них плоскость, их содержащая, покрашена в красный цвет. Известно, что красных плоскостей менее 2018. Каково наибольшее возможное количество красных плоскостей?

Ответ. 2015.

Решение. Заметим, что если бы никакие четыре точки не были компланарны (т. е. лежали в одной плоскости), то всего плоскостей оказалось бы $C_{24}^3=2024$. Если какие-то k точек компланарны, соответствующие C_k^3 плоскостей сливаются в одну. Если есть группы по

$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n$ компланарных точек (где $k_i > 3$), то количество отмеченных плоскостей будет равно

$$C_{24}^3 - \sum_{i=1}^{n}\left(C_{k_i}^3 - 1\right)\ .$$

Если хотя бы для какого-то i окажется $k_i \geqslant 5$, то $C_{k_i}^3 \geqslant 10$, и уже больше $2024 - 9 = 2015$ плоскостей получиться не может. Если же все k_i равны 4, то $C_{k_i}^3 = 4$, и количество плоскостей равно $2024 - 3n$. Наибольшим таким числом, не превосходящим 2017, является 2015.

6. В шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны имеют длину 1, а все углы равны $120°$. Точка M на диагонали AC и точка N на диагонали CE таковы, что $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = s$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите $42s^2$.

Ответ. 14.

Решение. Введем систему координат (непрямоугольную!) с центром в точке C и единичными векторами CA и CE. (Если точка Z имеет координаты (x, y), то $\overrightarrow{CX} = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CE}$.)

Нетрудно найти координаты точек M и N: они равны соответственно $(1-s, 0)$ и $(0, s)$. Чтобы найти координаты точки B, отметим сначала, что центр шестиугольника O имеет координаты $(1/3, 1/3)$, так как это центр масс точек $C = (0,0)$, $A = (1,0)$ и $E = (0,1)$. Далее, так как $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EO}$, то $B = (2/3, -1/3)$.

Уравнение прямой MN записывается как $x/(1-s) + y/s = 1$. Подставив в него координаты точки B, получаем уравнение $\frac{2}{1-s} - \frac{1}{s} = 3$. Умножая на знаменатели, приходим к $2s - 1 + s = 3s - 3s^2$, то есть $3s^2 = 1$. Отсюда $42s^2 = 14$.