Командная олимпиада

Младшая лига

1. (3) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого есть точный квадрат, треть — куб и одна пятая — пятая степень целого числа.

(предложил И. А. Шейпак)

2. (3) В классе учится $N < 40$ ребят. Все они написали контрольную по математике. Считается, что человек написал контрольную успешно, если он набрал не меньше 65 баллов. Оказалось, что средний балл всех ребят равен 66, средний балл написавших успешно равен 71, а средний балл написавших неуспешно равен 56. Позднее в условии одной из задач была обнаружена ошибка, и всем ребятам добавили по 5 баллов. После этого средний балл написавших успешно стал равен 75, а написавших неуспешно — 59. Сколько ребят учится в классе?

(ItaMO 2010, p1)

3. (4) На плоскости отмечено $n \geqslant 3$ точек (никакие три не лежат на одной прямой) и k отрезков, соединяющих некоторые из них. Фома́ и Ерёма играют в следующую игру. Ходы делаются по очереди. Сначала Фома выбирает две точки, называет одну из них A, другую B и кладет фишку в A. После этого каждым своим ходом Ерёма передвигает фишку из одной отмеченной точки в другую вдоль отрезка (если это возможно), а Фома каждым своим ходом удаляет один отрезок (кроме отмеченных точек). Ерёма победит, если сможет переместить фишку в B, если не сможет — то победит Фома.

Число точек n фиксировано. При каком наибольшем k Фома может гарантировать себе победу независимо от того, какие отрезки проведены изначально?

(Junior Olympiad of Malaysia 2015 P1)

4. (5) Существуют ли на плоскости такие шесть окружностей, что каждая из них содержит центры ровно трех других?

(IGO 2015)

5. (6) В вершинах правильного 2017-угольника расставлены числа $1, 2, \ldots, 2017$. Любая его ось симметрии делит числа, не лежащие на ней, на два множества. Назовем расстановку *хорошей* относительно данной оси симметрии, если каждое число одного из множеств больше симметричного ему числа. Существует ли расстановка, являющаяся хорошей относительно каждой оси симметрии?

(А. В. Бегунц: фактически ММО 1983.8.4)

6. (6) Докажите, что если $a, b, c \geqslant 3$, то

$$3(abc + b + 2c) \geqslant 2(ab + 2ac + 3bc)\,.$$

(Junior Olympiad of Malaysia 2015)

7. (7) В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH к гипотенузе. Биссектриса BD угла B пересекает высоту в точке E. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и HD. Докажите, что четырехугольник $CDKE$ и треугольник AHK равновелики. *(Peru Geometrico)*

8. (8) Вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1 + \cdots + a_n = 0$ и $|a_1| + \cdots + |a_n| = 1$. Докажите, что:

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

(Moroccan Team Selection Test 2012)

9. (8) В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Прямая m проходит через середины сторон BC и AC. Точка E симметрична точке D относительно m. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой AE. *(Centroamerican Math Olympiad 2017)*

10. (10) Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n. Найдите все такие $n > 1$, что

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \ldots = S(n^2).$$

(предложил И. А. Шейпак)

Старшая лига

1. (3) Существует ли число, составленное из цифр 5, 6, 8, 9, взятых по 2017 раз каждая, которое делится на какое-то число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, взятых по 2017 раз каждая?

(По мотивам Canadian Mathematical olympiad 2011)

2. (3) Докажите, что существует бесконечно много непостоянных целочисленных арифметических прогрессий, состоящих из 2016 членов, таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2017-й степенью натурального числа. *(Greece National Olympiad 1998)*

3. (4) Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2)$$

при любых действительных x. *(Greece National Olympiad 2014)*

4. (4) Через вершину A треугольника ABC провели касательную к описанной окружности. Ее точку пересечения с прямой BC назовем P. Пусть Q, R — точки, симметричные P относительно прямых AB, AC соответственно. Докажите, что прямая BC перпендикулярна QR.

(Japan Mathematical Olympiad Finals 2012)

5. (5) В колоде $2^n - 1$ карт. Ее тасуют следующим образом: верхние 2^{n-1} и нижние $2^{n-1} - 1$ смешиваются через 1, сохраняя порядок (верхняя карта при этом остается на месте). Через сколько таких операций колода придет в первоначальное положение? *(В. В. Новиков)*

6. (6) Пусть p — нечетное простое число. Пусть a_k — количество таких делителей d числа $kp + 1$, что $k \leqslant d \leqslant p$. Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$. *(Japan Mathematical Olympiad Finals 2016)*

7. (7) На квадратной доске размером 2018×2018 фишка стартовала из некоторой клетки и совершила обход, переходя каждый раз в соседнюю клетку и закончив в начальной клетке. При этом в каждую клетку она вошла ровно 1 раз. Для какого наименьшего k она может совершить такой обход, чтобы в каждый столбец и в каждую строку она вошла не более k раз? *(Canada National Olympiad 2015)*

8. (9) Пусть $x_1, \ldots, x_{100}$ неотрицательные действительные числа, такие что $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, 100$ (считаем $x_{101} = x_1$ и $x_{102} = x_2$). Найдите максимальное возможное значение суммы

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}\,.$$

(Shortlist 2010)

9. (9) На окружности ω с центром в точке O и радиусом R выбраны точки A и B такие, что $R < AB < 2R$. Окружность ω_1 с центром в точке A радиуса меньше R пересекает окружность ω в точках C и D, причем C лежит на меньшей дуге AB. Касательные, проведенные из точки B к окружности ω_1, касаются ее в точках E и F, причем E лежит вне окружности ω. Пусть M — пересечение прямых EC и DF. Докажите, что четырехугольник $BCFM$ вписанный. *(Greece National Olympiad 2014)*

10. (10) Дано натуральное число, большее 2017. Докажите, что его можно разложить в сумму нескольких неединичных натуральных слагаемых, произведение которых будет факториалом какого-нибудь натурального числа. *(А. Ф. Назмутдинов, по мотивам устного тура Турнира Городов 2012)*