Комбинаторика и логика

Старшая лига

1. В каком порядке надо переставить числа $1, 2, \ldots, 2017$, чтобы для полученного в результате набора $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ выражение

$$1^2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + \ldots + 2017^2 \cdot a_{2017}$$

имело наибольшее значение? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: в исходном порядке — $1, 2, \ldots, 2017$.

Решение.

А. Если набор $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ не совпадает с набором $1, 2, \ldots, 2017$, то найдутся два номера $i < j$, для которых $a_i > a_j$, а значит, значение выражения можно увеличить, переставив местами a_i и a_j, так как

$$(i^2 \cdot a_i + j^2 \cdot a_j) - (i^2 \cdot a_j + j^2 \cdot a_i) = (i^2 - j^2)(a_i - a_j) < 0.$$

Б. Поскольку различных таких наборов конечное множество, максимум данного выражения обязательно достигается на некотором наборе $a_1, a_2, \ldots, a_2$ причём этот набор, согласно п. А, не может быть не упорядоченным по возрастанию.

Замечание. Без уточнения из п. Б решение не полно, так как в п. А доказано лишь, что на других наборах максимум не достигается. А вдруг он не достигается вообще, вдруг процесс увеличения значения выражения не закончится никогда? $\square$

2. На складе в тёмной комнате разбросаны 24 тапочка, которые первоначально образовывали 12 пар: 3 разных цветов и 4 разных фасонов (одинаковых пар не было). Какое наименьшее число тапочек должен вынести из комнаты продавец, чтобы наверняка предъявить покупателю 3 пары тапочек 3 разных цветов и одновременно 3 разных фасонов? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: 21.

Решение. Если взять не более 20 тапочек, то может случиться, что среди них надётся не более $20 - 12 = 8$ пар, причём они вполне могут оказаться не 3, а только 2 цветов. Поэтому такого количества тапочек не достаточно для гарантированного получения *искомых* 3 пар тапочек.

Если же взять 21 тапочку, то среди них найдётся не менее $21 - 12 = 9$ пар, причём они будут представлять не менее 3 цветов (иначе всего пар не более $3 \times 4 = 8$). Но тогда *выберем* из них 3 пары 3 разных цветов:

(а) если они ровно 3 разных фасонов, то эти 3 пары — искомые;

(б) если все они одного фасона, то возьмем любую пару другого фасона и заменим ею *выбранную* пару того же цвета, оказавшись в следующей ситуации (в);

(в) если они ровно 2 разных фасонов, то какие-то 2 *выбранные* пары имеют 1 фасон и тогда хотя бы 1 из них можно заменить парой того же цвета, но какого-нибудь 3-го фасона (такая пара найдётся, иначе всего пар не более $2+2+4=8$), получив в результате искомые 3 пары. □

3. Во множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел требуется заранее *выделить* такое подмножество, чтобы при всех достаточно больших *чётных* значениях $n \in \mathbb{N}$ после переноса в выражении $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ всех *выделенных* сомножителей из числителя в знаменатель получалась бы величина $n?$, удовлетворяющая неравенству

$$|n? - 1| < 10^{-2017}.$$

Возможно ли это? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: да.

Решение. Для любого чётного $n = 2k \in \mathbb{N}$ обозначим $a_k = (2k-1)/(2k)$, $b_k = (2k)/(2k-1)$ и заметим, что обе последовательности a_k, b_k строго монотонно сходятся к 1, причём первая возрастает, а вторая убывает.

Теперь построим последовательность $x_k \in \{a_k, b_k\}$, а по ней определим выражение $n? = (2k)? = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$ (которое тогда автоматически будет иметь требуемый в задаче вид) следующим образом индукцией по $k \in \mathbb{N}$:

1) положим $x_1 = a_1 = 1/2$;

2) пусть при некотором $k > 1$ уже построены числа $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, тогда если $(2k-2)? \leqslant 1$, то положим $x_k = b_k > 1$, а если $(2k-2)? > 1$, то положим $x_k = a_k < 1$.

Действуя по указанной схеме, мы получим

$$2? = \frac{1}{2} < 4? < 6? < 8? < 10? = \frac{64}{63} > 12? = \frac{176}{189} < 14? = \frac{352}{351} > \ldots$$

Построенная таким образом последовательность $(2k)?$ сходится к 1 (а значит, начиная с некоторого номера, не будет покидать окрестность точки 1 радиуса 10^{-2017}), действительно:

а) пусть $(2k-2)? \leqslant 1$, тогда если $(2k)? \leqslant 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем $(2k-2)?$, а если $(2k)? > 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем b_k;

б) пусть $(2k-2)? > 1$, тогда если $(2k)? > 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем $(2k-2)?$, а если $(2k)? \leqslant 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем a_k;

в) члены последовательности $(2k)?$ с ростом номера k обязательно оказываются где-то не больше 1, затем где-то больше 1, затем где-то снова не больше 1 и так далее, так как выражение $b_l \cdot \ldots \cdot b_m = (a_l \cdot \ldots \cdot a_m)^{-1}$

при фиксированном l неограниченно растет с ростом m (см. задачу 4а из регаты старшей лиги). $\square$

4. Из сувениров 7 видов составили 6 различных подарочных комплектов, содержащих по 3 разных сувенира каждый. Можно ли утверждать, что какие-то 2 из этих комплектов содержат *ровно* 1 общий сувенир? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: да.

Решение. Пусть во множестве M составленных 6 комплектов никакие 2 комплекта *не содержат* ровно 1 общий сувенир. Тогда число общих сувениров у любых 2 разных комплектов равно либо 0, либо 2 — комплекты этого (последнего) типа будем называть *связанными.*

Введённое на множестве M отношение связанности транзитивно: если комплекты A, B связаны и комплекты B, C связаны, то комплекты A, C тоже связаны, так как обязательно имеют хотя бы 1 общий сувенир (иначе комплект B должен был бы содержать 4 разных сувенира: 2 из комплекта A и 2 из комплекта C).

Поэтому множество M разбивается на такие классы (возможно, всего 1 класс), что любые 2 комплекта из одного класса имеют ровно 2 общих сувенира, а из разных — 0. Пусть некоторый класс охватывает в общей сложности ровно $k \geqslant 3$ сувениров, тогда:

(1) если $k = 3$, то в классе ровно 1 комплект вида $\{a, b, c\}$;

(2) если $k = 4$, то в классе не более 4 комплектов вида $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, a\}$ и $\{d, a, b\}$;

(3) если $k \geqslant 5$, то в классе ровно $k - 2$ комплекта вида $A_i = \{a, b, c_i\}$, где $i = 1, \ldots, k - 2$: действительно, фиксировав два комплекта A_1 и A_2, составленные из сувениров a, b, c_1, c_2, мы получим, что любой комплект, содержащий новый сувенир c_3, имеет вид A_3 (если он не содержит 2 сувениров a и b, то он должен содержать хотя бы 1 из них, а с ним и все сувениры c_1, c_2, c_3, что слишком много), а тогда и любой следующий комплект имеет также вид A_i (по той же причине).

Таким образом, множество, состоящее из исходных 7 сувениров, охватывается (возможно, не целиком) либо одним классом вида (3), содержащим не более 5 комплектов, либо двумя классами вида (1), содержащими по 1 комплекту каждый, либо классами вида (1) и (2), содержащими в общей сложности не более $1 + 4 = 5$ комплектов. В любом случае количество комплектов не превосходит 5, что противоречит условию. $\square$

5. На столе лежат 40 красных и 50 зелёных камней. Два игрока, Петя и Вася, ходят поочерёдно: при каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет произвольное (по своему усмотрению) число камней этого цвета, являющееся делителем числа камней другого цвета на момент хода (ноль делится на любое натуральное число). Выигрывает тот, кто берёт последний камень. Кто из них имеет *гарантированный шанс* выиграть, если Петя ходит первым? *(И. А. Шейпак)*

Ответ: Петя.

Решение. Пусть в какой-то момент на столе лежат a красных и b зелёных камней. Тогда:

(1) если a и b имеют разную чётность, то ходящий выигрывает, поскольку если чётное число равно 0, то ему для выигрыша нужно просто забрать оставшиеся камни (их число — делитель нуля), а если оба числа не равны 0, то он вычитает из чётного числа 1 (заведомо — делитель другого числа) и приходит к следующей ситуации (2), когда оба числа нечётны;

(2) если a и b нечётны, то ходящий проигрывает, так как он вынужден из одного нечётного числа вычесть также нечётное число (делитель нечетного числа) и получить чётное, то есть создать ситуацию из (1), выигрышную для противника;

(3) если a и b чётны, то каждый игрок вынужден отнимать чётное число камней, так как иначе он создает ситуации (1), выигрышную для противника. Поэтому мы можем рассматривать не камни, а пары камней, и решение задачи для $(2a, 2b)$ эквивалентно решению задачи для (a, b). Именно такая ситуация задана в условии, где $a = 20$, $b = 25$, поэтому задача сводится к случаю (2) и выигрывает Петя;

(4) для полноты заметим, что применяя идею из п. (3) несколько раз, получаем, что вообще, если $a = 2^k\alpha$ и $b = 2^k\beta$, где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, то при обоих нечетных α, β начинающий проигрывает, а при ровно одном нечетном — выигрывает. $\square$