Комбинаторика и логика

Младшая лига

1. В каком порядке надо переставить числа $1, 2, \ldots, 2017$, чтобы для полученного в результате набора $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ выражение

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + 2017 \cdot a_{2017}$$

имело наименьшее значение? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: строго в обратном порядке — $2017, 2016, \ldots, 1$.

Решение.

А. Если набор $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ не совпадает с набором $2017, 2016, \ldots, 1$, то найдутся два номера $i < j$, для которых $a_i < a_j$, а значит, значение выражения можно уменьшить, переставив местами a_i и a_j, так как

$$(i \cdot a_i + j \cdot a_j) - (i \cdot a_j + j \cdot a_i) = (i - j)(a_i - a_j) > 0.$$

Б. Поскольку различных таких наборов конечное множество, минимум данного выражения обязательно достигается на некотором наборе a_1, a_2, $\ldots$, a_{2017}, причём этот набор, согласно п. А, не может быть не упорядоченным по убыванию.

Замечание. Без уточнения из п. Б решение не полно, так как в п. А доказано лишь, что на других наборах минимум не достигается. А вдруг он не достигается вообще, вдруг процесс уменьшения значения выражения не закончится никогда? $\square$

2. На складе в тёмной комнате разбросаны 24 тапочка, которые первоначально образовывали 12 пар: 3 разных цветов и 4 разных фасонов (одинаковых пар не было). Какое наименьшее число тапочек должен вынести из комнаты продавец, чтобы *наверняка* предъявить покупателю 2 пары тапочек разных цветов и одновременно разных фасонов? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: 17.

Решение. Если взять не более 16 тапочек, то может случиться, что среди них надётся не более $16 - 12 = 4$ пар, причём все они вполне могут оказаться 1 цвета. Поэтому такого количества тапочек не достаточно для гарантированного получения *искомых* 2 пар тапочек.

Если же взять 17 тапочек, то среди них найдётся не менее $17 - 12 = 5$ пар, причём они будут представлять не менее 2 цветов (ведь пар каждого цвета окажется не более 4) и не менее 2 фасонов (ведь пар каждого фасона окажется не более 3). Но тогда, *выберем* из них 2 пары разного цвета:

(а) если они еще и разного фасона, то эти 2 пары — искомые;

(б) если они одного фасона, то добавим пару другого фасона, и она хотя бы с одной из *выбранных* 2 пар ещё и разного цвета, то есть образует с ней искомые 2 пары. $\square$

3. Из любой ли возрастающей последовательности натуральных чисел можно выбрать такую *подпоследовательность* (т. е. проредить её, убрав часть членов), чтобы выполнялось одно из двух:

1) либо каждый её член делится на любой меньший;

2) либо наоборот, ни один её член не делится ни на какой другой?

(И. Н. Сергеев)

Ответ: да.

Решение. Если просматривать подряд все члены последовательности, то могут представиться ровно две взаимоисключающие возможности:

1) либо, начиная с какого-то номера, окажется, что для каждого члена последовательности с большим номером хотя бы один из следующих за ним членов на него делится. Тогда выберем первый такой член, по нему, аналогично, второй, по нему третий и так далее. В результате получим подпоследовательность первого типа, так как каждый член в ней (по транзитивности) делится не только на предыдущий, но и на все члены с меньшими номерами;

2) либо для любого номера в последовательности найдется такой член с большим номером, что ни один из следующих за ним членов на него не делится. Тогда по номеру 1 выберем первый такой член, по его номеру, аналогично, второй, по его номеру третий и так далее. В результате получим подпоследовательность второго типа. $\square$

4. Из сувениров 6 видов составили 5 различных подарочных комплектов, содержащих по 3 разных сувенира каждый. Можно ли утверждать, что какие-то 2 из этих комплектов содержат *ровно* 1 общий сувенир? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: да.

Решение. Пусть во множестве M составленных 5 комплектов никакие 2 комплекта *не содержат* ровно 1 общий сувенир. Тогда число общих сувениров у любых 2 разных комплектов равно либо 0, либо 2 — комплекты этого (последнего) типа будем называть *связанными.*

Введённое на множестве M отношение связанности транзитивно: если комплекты A, B связаны и комплекты B, C связаны, то комплекты A, C тоже связаны, так как обязательно имеют хотя бы 1 общий сувенир (иначе комплект B должен был бы содержать 4 разных сувенира: 2 из комплекта A и 2 из комплекта C).

Поэтому множество M разбивается на такие классы (возможно, всего 1 класс), что любые 2 комплекта из одного класса имеют ровно 2 общих сувенира, а из разных — 0. Пусть некоторый класс охватывает в общей сложности ровно $k \geqslant 3$ сувениров, тогда:

(1) если $k = 3$, то в классе ровно 1 комплект вида $\{a, b, c\}$;

(2) если $k = 4$, то в классе не более 4 комплектов вида $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, a\}$ и $\{d, a, b\}$;

(3) если $k \geqslant 5$, то в классе ровно $k - 2$ комплекта вида $A_i = \{a, b, c_i\}$, где $i = 1, \ldots, k - 2$: действительно, фиксировав два комплекта A_1 и A_2, составленные из сувениров a, b, c_1, c_2, мы получим, что любой комплект, содержащий новый сувенир c_3, имеет вид A_3 (если он не содержит 2 сувениров a и b, то он должен содержать хотя бы 1 из них, а с ним и все сувениры c_1, c_2, c_3, что слишком много), а тогда и любой следующий комплект имеет также вид A_i (по той же причине).

Таким образом, множество, состоящее из исходных 6 сувениров, охватывается (возможно, не целиком) либо одним классом вида (3) или (2), содержащим не более 4 комплектов, либо двумя классами вида (1), содержащими по 1 комплекту каждый. В любом случае количество комплектов не превосходит 4, что противоречит условию. □

5. На столе лежат 30 красных и 50 зелёных камней. Два игрока, Петя и Вася, ходят поочерёдно: при каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет произвольное (по своему усмотрению) число камней этого цвета, являющееся делителем числа камней другого цвета на момент хода (ноль делится на любое натуральное число). Выигрывает тот, кто берёт последний камень. Кто из них имеет *гарантированный шанс* выиграть, если Петя ходит первым?

(предложил И. А. Шейпак)

Ответ: Вася.

Решение. Пусть в какой-то момент на столе лежат a красных и b зелёных камней. Тогда:

(1) если a и b имеют разную чётность, то ходящий выигрывает, поскольку если чётное число равно 0, то ему для выигрыша нужно просто забрать оставшиеся камни (их число — делитель нуля), а если оба числа не равны 0, то он вычитает из чётного числа 1 (заведомо — делитель другого числа) и приходит к следующей ситуации (2), когда оба числа нечётны;

(2) если a и b нечётны, то ходящий проигрывает, так как он вынужден из одного нечётного числа вычесть также нечётное число (делитель нечетного числа) и получить чётное, то есть создать ситуацию из (1), выигрышную для противника;

(3) если a и b чётны, то каждый игрок вынужден отнимать чётное число камней, так как иначе он создает ситуации (1), выигрышную для противника. Поэтому мы можем рассматривать не камни, а пары камней, и решение задачи для $(2a, 2b)$ эквивалентно решению задачи для (a, b).

Именно такая ситуация задана в условии, где $a = 15$, $b = 25$, поэтому задача сводится к случаю (2) и выигрывает Вася;

(4) для полноты заметим, что применяя идею из п. (3) несколько раз, получаем, что вообще, если $a = 2^k\alpha$ и $b = 2^k\beta$, где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, то при обоих нечетных α, β начинающий проигрывает, а при ровно одном нечетном — выигрывает. $\square$