Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. На бахчевом развале продают арбузы и дыни. Средняя масса арбуза равна 12 кг, а средняя масса дыни — 6 кг. Сколько арбузов, а сколько дынь на развале, если их суммарное количество 300 шт, а суммарная масса 2,4 т?

Ответ: арбузов — 100, дынь — 200.

Обозначив через x и y количество арбузов и дынь соответственно, получим $12x + 6y = 2400$ и $x + y = 300$, откуда $x = 100$ и $y = 200$. □

2. Решите уравнение $2^{2p} - 2^p + 1 = q$, где p и q простые числа.

Ответ: $p = 2$, $q = 13$.

Решение. Пусть $p = 2$, тогда $q = 13$.

Пусть теперь p — нечетное простое. Тогда левая часть равенства делится на 3 (так как 2 в нечетной степени дает при делении на 3 остаток 2, а в четной — 1), поэтому $q = 3$, откуда $(2^p - 2)(2^p + 1) = 0$, т.е. решений нет. □

3. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$x^2 - (a + b)x + 8 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 - b(b + 1)x + c = 0 \tag{2}$$

$$x^4 - b(b + 1)x^2 + c = 0 \tag{3}$$

Каждое из них имеет хотя бы один действительный корень. Известно, что корни уравнения (1) больше 1. Известно также, что все корни уравнения (1) удовлетворяют уравнению (3) и хотя бы один корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2). Найдите все возможные тройки чисел a, b, c.

Ответ: тройки (a, b, c) таковы $(2, 4, 64)$, $(11, -5, 64)$, $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 16\sqrt{2}\right)$, $\left(1 + 6\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2}, 16\sqrt{2}\right)$,

Пусть $x = x_1$ и $x = x_2$ (возможно $x_1 = x_2$) — корни уравнения (1), а $x = t_1$ и $x = t_2$ — корни уравнения (2). Тогда у уравнения (3) корни $\pm\sqrt{t_1}$ и $\pm\sqrt{t_2}$ (какие-то из них могут пропасть, если t_1 или t_2 окажутся неположительными). Если одно из чисел t_1 или t_2 не больше 1 (пусть это будет t_1), то $\sqrt{t_1}$ не корень уравнения (1), поэтому обязательно $t_2 > 1$ и $x_1 = x_2 = \sqrt{t_2}$. Но тогда оба корня $x_1 = x_2$ — корни уравнения (2), поэтому $\sqrt{t_2} = x_1 = t_2 > 1$, что невозможно. Значит, оба корня t_1, t_2 больше 1.

Рассмотрим случай $x_1 \neq x_2$. Тогда $x_1 = \sqrt{t_1}$ и $x_2 = \sqrt{t_2}$, а также $x_1 = t_2$ (для этого можно перенумеровать корни, а случай $x_1 = t_1$ невозможен, так как $t_1 \neq \sqrt{t_1}$). Далее, из теоремы Виета для уравнения (1) получаем $8 = x_1 x_2 = t_2\sqrt{t_2}$, откуда $t_2 = 4 = x_1$, $x_2 = 2$, $t_1 = t_2^2 = 16$. Наконец, по той же теореме Виета получаем $a + b = 6$, $b(b+1) = 20$ и $c = 64$, откуда $b = 4$ или $b = -5$ и, соответственно, $a = 2$ или $a = 11$.

Рассмотрим случай $x_1 = x_2$. Аналогично получаем $x_1 = x_2 = \sqrt{t_1} = t_2$, а из теоремы Виета для уравнения (1) имеем $x_1^2 = 8$, то есть $x_1 = x_2 = t_2 = 2\sqrt{2}$ и $t_1 = 8$. Далее, получаем $a + b = 4\sqrt{2}$, $b(b+1) = 8 + 2\sqrt{2}$ и $c = 16\sqrt{2}$, откуда $b = -\frac{1}{2} \pm \frac{4\sqrt{2}+1}{2}$ и, соответственно, $a = 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \mp \frac{4\sqrt{2}+1}{2}$. □

4. Пусть $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 2(1-x)(1-y) + 1\,.$$

Сделаем замену $1 - x = u$ и $1 - y = v$, тогда $0 \leqslant u, v \leqslant 1$, $1 - x^2 = u(2-u)$, $1 - y^2 = v(2-v)$ и требуется доказать неравенство

$$2\sqrt{uv(2-u)(2-v)} \leqslant 2uv + 1,$$

или

$$2\sqrt{uv(4 - 2(u+v) + uv)} \leqslant 2uv + 1.$$

Обозначим $g = \sqrt{uv}$. Учитывая оценки $u + v \geqslant 2g$ и $2g \leqslant 1 + g^2$, получаем

$$\begin{aligned} 2\sqrt{uv(4-2u-2v+uv)} &= 2\sqrt{g^2(4-2u-2v+g^2)} \leqslant 2\sqrt{g^2(4-4g+g^2)} = \\ &= 2\sqrt{g^2(2-g)^2} = 2g(2-g) = 4g - 2g^2 \leqslant \\ &\leqslant 4 + 4g^2 - 2g^2 = 2g^2 + 1 = 2uv + 1\,. \quad \square \end{aligned}$$

Старшая лига

1. Решите уравнение

$$3p^q + 3q^p = n!\,,$$

где p, q — простые числа, а n — натуральное.

Ответ: $p = q = 2$, $n = 4$.

Если $p = q$, то получаем $2 \cdot 3p^p = n!$, откуда $n = 4$ (если $n > 4$, то число $n!/6 = p^p$ делится на 2 и на 5, что невозможно) и $p = q = 2$.

Если $p < q$, то $p < n$ (иначе $p^q > n!$), поэтому $3q^p = n! - 3p^q$ делится на p. А тогда и $3q$ делится на p, а значит, остается проверить только случай $3 = p < q$. Тогда $n! = 3(3^q + q^3) > 5!$ и $n > 5$, поэтому $n!$ делится на 9, а значит, q делится на 3, что невозможно для простого $q > 3$. □

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника, периметр которого не превышает 2π. Докажите, что $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ также являются сторонами некоторого треугольника.

Докажем, например, неравенство $\sin b+\sin c>\sin a$ (два других неравенства треугольника доказываются аналогично):

$$\sin b+\sin c=2\cdot\sin\frac{b+c}{2}\cdot\cos\frac{b-c}{2}>2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b-c}{2}>$$
$$>2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b-c}{2}>2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\sin a\,,$$

так как из $a<b+c<2\pi-a$ следует $\sin\frac{b+c}{2}>\sin\frac{a}{2}$, а из $|b-c|<a$ следует $\cos\frac{b-c}{2}>\cos\frac{a}{2}$. $\square$

3. Назовем натуральное число n *забавным*, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым.

(a) Какое наибольшее количество делителей может иметь забавное число?

(b) Найдите все забавные числа с максимальным количеством делителей.

Ответ: максимум 8 делителей, только у одного забавного числа $3^3\cdot 5$.

Решение. Среди делителей забавного числа не может быть ни двойки, ни простого d с остатком 1 при делении на 3 (иначе простое $d+2$ кратно 3, откуда $d=1$). Поэтому в качестве делителей остаются тройки (и их степени) и максимум один простой делитель $p\equiv 2\pmod 3$ (если есть еще один такой делитель q, то $d=pq\equiv 1\pmod 3$ и $d+2$, кратное 3, — не простое). Причём степень тройки не может быть больше 4, так как иначе есть делитель $d=3^5$, для которого $d+2=245$ — не простое.

Может ли забавное число иметь вид $3^k\cdot p$ при $k<5$?

1. Если $p=5$, то при $k=4$ есть делитель $d=3^4\cdot 5$, причём $d+2=407$ — делится на 11, а при $k=3$ получаем забавное число $3^3\cdot 5$ с 8 делителями.

2. Если $p\neq 5$ и $k>2$, то как минимум один из делителей d вида $3^m\cdot p$, где $m=0,1,2,3$, при делении на 5 даст остаток 3 (что проверяется перебором их ненулевых остатков), а тогда $d+2$ кратно 5, и число не забавно. Таким образом, при $k\leqslant 2$ максимум 6 делителей (что меньше 8) может иметь забавное число вида $3^2\cdot p$. $\square$

4. Пусть $a,b,c>0$ и $ab+bc+ac=1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant\frac{1}{abc}\,.$$

Решение. Поскольку $f(x)=\sqrt[3]{x}$ выпукла вниз а на $[0,+\infty)$, из неравенства Йенсена получаем

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{a}+6b\right)+\left(\frac{1}{b}+6c\right)+\left(\frac{1}{c}+6a\right)\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{abc}+6(a+b+c)\right)}\leqslant\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{abc}+\frac{6}{3abc}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

При этом мы использовали:

1) данное условие $ab+bc+ac=1$;

2) неравенство $(a+b+c)\leqslant\frac{1}{3abc}$, вытекающее из неравенства

$$(a+b+c)\cdot 3abc\leqslant(ab+bc+ac)^2\Leftrightarrow a^2bc+ab^2c+abc^2\leqslant a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2,$$

которое сводится к известному $xy+xz+yz\leqslant x^2+y^2+z^2$ заменой $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$;

3) неравенство $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{1}{abc}$, вытекающее из неравенства

$$(abc)^{2/3}=\sqrt[3]{(ab)(bc)(ac)}\leqslant\frac{ab+bc+ac}{3}=\frac{1}{3}.\quad\square$$