Алгебра

Младшая лига

1. На бахчевом развале продают арбузы и дыни. Средняя масса арбуза равна 12 кг, а средняя масса дыни — 6 кг. Сколько арбузов, а сколько дынь на развале, если их суммарное количество 300 шт, а суммарная масса 2,4 т?
(Д. В. Горяшин, по мотивам олимпиады «Ломоносов»)

2. Решите уравнение $2^{2p} - 2^p + 1 = q$, где p и q простые числа.

3. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$x^2 - (a+b)x + 8 = 0 \tag{1}$$
$$x^2 - b(b+1)x + c = 0 \tag{2}$$
$$x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0 \tag{3}$$

Каждое из них имеет хотя бы один действительный корень. Известно, что корни уравнения (1) больше 1. Известно также, что все корни уравнения (1) удовлетворяют уравнению (3) и хотя бы один корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2). Найдите все возможные тройки чисел a, b, c.

4. Пусть $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 2(1-x)(1-y) + 1\,.$$

Старшая лига

1. Решите уравнение

$$3p^q + 3q^p = n!\,,$$

где p, q — простые числа, а n — натуральное.

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника, периметр которого не превышает 2π. Докажите, что $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ также являются сторонами некоторого треугольника.

3. Назовем натуральное число n *забавным*, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым.

(a) Какое наибольшее количество делителей может иметь забавное число?

(b) Найдите все забавные числа с максимальным количеством делителей.

4. Пусть $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqslant \frac{1}{abc}\,.$$