

Третий тур олимпиады для 7-8 классов

Предпочтительная форма оформления работы – создание одного файла с решениями всех заданий, которые вы выполните (в том числе можно создать один файл из рукописных сканов работ). В этом случае за работу **начисляется один дополнительный балл**. Если, дополнительно, все решения, включая формулы, таблицы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), то **начисляется еще один балл**.

Каждое задание само по себе вне зависимости от способа оформления оценивается из 6 баллов. В том числе баллы снимаются за недостаточную строгость обоснования даже при наличии правильного ответа.

Задача 1.

В какой системе счисления понадобится меньше всего заготовить карточек с цифрами (каждая карточка закреплена за соответствующей позицией табло), чтобы можно было показать на табло любое целое неотрицательное число, которое в десятичной системе счисления меньше 1000? Изменится ли ответ, при увеличении диапазона представимых с помощью выбранных карточек чисел? Ответ обосновать. Например, для представления чисел, меньших 10, в десятичной системе нужно 10 карточек, а в двоичной – 8 (для каждой позиции табло нужно 2 карточки).

Ответ: системы счисления 2, 3 и 4. 19 карточек без ведущих нулей (20 с ведущим нулём и указанием этого). Для диапазона до 1023 ответ не меняется, до 1457 подходит только троичная система счисления.

Критерии: дано исчерпывающее обоснование и верный ответ – 6 баллов, допущены ошибки в обосновании, получен верный ответ – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

Решение: данную задачу можно решить с помощью программы. Для этого достаточно заметить, что перебирать системы счисления больше, чем 999 не надо и то, что

во всех разрядах нам понадобятся карточки со всеми цифрами, а в старшем только ограниченное число карточек. Код программы на Python:

```
def conv(n, k):
    ans = []
    while n > 0:
        ans.append(n % k)
        n //= k
    return ans[::-1]

def task1():
    mn = 999
    ans = [999]
    q = [0] * 1000
    q[999] = [999]
    for i in range(2, 1000):
        q[i] = conv(999, i)
    if (len(q[i]) - 1) * i + q[i][0] < (len(q[mn]) - 1) * mn + q[mn][0]:
        mn = i
    ans = [i]
    elif (len(q[i]) - 1) * i + q[i][0] == (len(q[mn]) - 1) * mn + q[mn][0]:
        ans.append(i)
    for i in ans:
        print(*q[i], sep=' ', end=' ')
        print((len(q[i]) - 1) * i + q[i][0], i)

    task1()
```

Мы получаем что, минимальное количество карточек необходимо для 2, 3 и 4-ричной систем счисления. Далее надо найти самые большие числа, которые можно представить в данных системах счисления с данными наборами карточек. Набор карточек узнаём из представления 1000 в данных системах счисления:

$$1111100111_2 = 1000$$

$$1101000_3 = 1000$$

$$33213_4 = 1000$$

Максимальные числа с имеющимся наборами:

$$1111111111_2 = 1023$$

$$122222_3 = 1457 \text{ (старший разряд 1, так как в этом разряде у нас нет карточки 2)}$$

$$33333_4 = 1023$$

При увеличении диапазона до 1023 – ответ не меняется, с 1024 до 1457 подходит только троичная система счисления.

Задача 2.

Используя словарь слов русского языка <http://www.speakrus.ru/dict/litf-win.zip> найдите слово, из букв которого можно составить больше всего других как минимум трехбуквенных слов русского языка. Переставлять буквы можно, каждую букву можно использовать не более чем столько раз, сколько она присутствует в выбранном слове. Приведите 20 самых длинных слов (или все, если искомым слов меньше), которые можно из него составить и для слов каждой длины, начиная с трех, укажите количество найденных слов. Опишите способ выполнения задания.

Ответ: из слова «попреблагорассмотрительствующемуся» можно составить 16301 (включая себя) слово из данного словаря длиной 3 или больше.

3 – 737, 4 – 1636, 5 – 2452, 6 – 2887, 7 – 2771, 8 – 2304, 9 – 1579, 10 – 1012, 11 – 538, 12 – 254, 13 – 87, 14 – 30, 15 – 9, 16 – 3, 17 – 0, 18 – 0, 19 – 0, 20 – 0, 21 – 0, 22 – 0, 23 – 0, 24 – 0, 25 – 1, 26 – 0, 27 – 0, 28 – 0, 29 – 0, 30 – 0, 31 – 0, 32 – 0, 33 – 0, 34 – 1

Критерии: правильно найдено слово, показан способ его найти и даны верные ответы – 6 баллов. Нет обоснования – минус 2 балла. Дано слово, которое содержит больше 10000 подслов из словаря – 2 балла, больше 1000 подслов – 1 балл. Правильная идея – 2 балла.

Решение:

```
def coun(string):
    ans = [0]*34
    for c in string:
        ans[ord(c) - ord("a")] += 1
    return ans

def sol_(dic):
    ans = [0, '']
    ind = 0
    for i in range(len(dic)):
        cnt = 0
        for j in range(len(dic)):
            q = True
            for k in range(34):
                if dic[i][1][k] < dic[j][1][k]:
                    q = False
                    break
            if q:
                cnt += 1
        if cnt > ans[0]:
```

```

ans = [cnt, dic[i][0]]
ind = i
#print(ans)
return ind

defsol(dic, ind):
ans = [0, '']
i = ind#101019
cnt = 0
ans_str = []
for j in range(len(dic)):
    q = True
    for k in range(34):
if dic[i][1][k] <dic[j][1][k]:
        q = False
        break
    if q:
cnt += 1
ans_str.append(dic[j][0])
if cnt>ans[0]:
ans = [cnt, dic[i][0]]
print(ans)
ans_str.sort(key=lambda x: (-len(x), x))
ans_len = [0] *len(ans_str)
for q in ans_str:
ans_len[len(q)] += 1
print(ans_str[:21], sep='\n')
for q in range(3, len(dic[i][1]) + 1):
print(q, '-', ans_len[q])

deftask2():
inp = open("litf-win.txt")
dic = []
for s in inp:
    s = s.split()[0]
if len(s) >2:
dic.append([s, coun(s)])
print("start")
    sol(dic, sol_(dic))

task2()

```

Данное решение будет работать несколько часов (решение для получения ответа было написано на C++, оно работало по такому же алгоритму и получило ответ меньше, чем за 10 минут). Вначале по каждому слову строится его «скелет» – количество каждой из букв (0 для тех букв, которых нет). Проверка того, что слово можно составить из другого – его «скелет» по каждой букве меньше либо равен аналогичной букве из второго скелета. В данном решении использовался скелет из 34 букв – это связано с кодировками и буквой «ё». Она стоит вне алфавита. Вначале стоит 32 буквы без ё, потом ещё один символ и потом ё.

После построения скелета для каждого слова, идёт поиск количества подслов для каждого из слов и выбирается максимальное из них. После этого выводится ответ в правильной форме (двадцать искомым слов можно быстро получить, если в task2 запустить `sol(dic, 101019)`).

Задача 3.

Среди задач 2 тура олимпиады была следующая.

Вы работаете в 15-этажном здании и имеете три одинаковых жестких диска. Вы хотите определить – при броске с максимально какого этажа диск останется целым. Если он разобьётся даже при броске с первого этажа, то ответ 0. Вы можете бросать имеющиеся диски с любого этажа, причем, если диск не разбился, то его можно бросать повторно.

Какое минимальное количество бросков вам придется сделать в худшем случае? Можно было бы бросать всего один диск сначала с первого этажа, потом – второго и т.д., но, конечно, вы можете гарантированно решить задачу за меньшее число бросков.

Приведите и постарайтесь обосновать алгоритм решения этой задачи в случае

- а) двух жестких дисков
- б) трех жестких дисков

для N -этажного дома.

Критерии: правильно решён пункт а) с обоснованием – 3 балла, правильно решён пункт б) с обоснованием – 3 балла. Неточности в формулах, не влияющих на идею – минус 1 балл (по каждому пункту), дан только ответ – 1 балл (по каждому из пунктов).

Решение: Рассмотрим решение для одного диска – понятно, что мы будем вынуждены проверять все этажи по порядку, начиная с первого.

Для 2 дисков: рассмотрим бросок с какого-то этажа. Тогда диск либо разобьётся, либо нет. При этом мы хотим, чтобы количество проверок бросков было минимальным. Для этого количество бросков в случае, если диск разобьётся и если нет, должно быть одинаковым. В случае если диск разбился, то решаем задачу для одного диска, но для этажей, меньших выбранного, а если не разбился, то решаем задачу для 2 дисков для

этажей, больших выбранного. Из этого рекурсивного алгоритма можно вывести формулу для N :

$$\frac{k(k+1)}{2} \geq N$$

Где k – это минимальное количество бросков.

Для случая с тремя дисками будем пользоваться той же логикой, только в этот раз если диск разбился, то мы решаем задачу для 2 дисков, а если нет, то для 3. Тогда итоговая формула будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{k^3 + 5 * k}{6} \geq N.$$

Задача 4.

Борис, Кирилл, Даниил и Савелий – инженеры. Один из них – автомеханик, другой – химик, третий – строитель, четвертый – радиотехник. Известно, что:

Борис, который обыгрывает в шахматы Даниила и Кирилла, но проигрывает Савелию, ходит на лыжах лучше Кирилла, который моложе его, и лучше радиотехника, а также посещает театр вдвое чаще, чем тот инженер, который моложе его и Кирилла;

Химик, который посещает театр вдвое чаще, чем автомеханик, не является самым молодым, а старше его только один из инженеров;

Строитель, который на лыжах ходит хуже, чем радиотехник, как правило, проигрывает в шахматных сражениях автомеханику;

Самый старший из инженеров лучше всех играет в шахматы и чаще всех бывает в театре, а самый молодой лучше всех ходит на лыжах;

Радиотехник - лучший шахматист и самый заядлый театрал, а автомеханик - лучший лыжник.

Назовите профессию каждого из инженеров. Упорядочите инженеров по возрасту начиная с наибольшего, а лыжников и шахматистов – по степени мастерства начиная с наивысшей. Ответ обоснуйте.

Ответ: Борис (Б) – химик, Кирилл(К) – строитель, Даниил(Д) – автомеханик и Савелий(С) – радиотехник. Возраст: $D \leq K \leq B \leq C$, шахматы: $K \leq D \leq B \leq C$, лыжи: $K \leq C \leq B \leq D$, театр: $D \leq B \leq C$.

Критерии: правильное решение и обоснование – 6 баллов. Отсутствие обоснования – минус 2 балла. Отсутствие ответа для возраста шахмат и лыж – минус 1 балл за каждый из отсутствующих. Неправильный ответ – 0.

Решение: данную задачу можно было решать полным перебором, либо перебором с отсечением (не рассматривать варианты, которые невозможны), в таком случае ответ получается единственным образом.

Задача 5.

Физику, химику, биологу и математику нужно перейти через мост. Мост выдерживает одновременно только двух человек, а у них есть только один фонарик, без которого по мосту идти опасно. Физик пересекает мост в одиночку за 1 минуту, химик за 2, биолог за 5, а математик за 10. Если два человека идут вместе, то они тратят столько же времени, сколько наиболее медленный из них. За какое минимальное время они все могут перейти по мосту на другой берег (для этого некоторым людям придется в том числе возвращаться обратно, а потом снова переходить)? Ответ обоснуйте

Ответ: 17 минут

Критерии: Правильный ответ с обоснование – 6 баллов. Правильный ответ с решением без обоснования минимальности – 4 балла. Правильный ответ без решения – 2 балла. Не минимальный ответ с решением.

Решение: $2 + 1 + 10 + 2 + 2$. В одну сторону идут физик и химик, обратно идёт физик, потом идут биолог и математик, возвращается химик, и переходят физик и химик. Доказательство минимальности: всего 4 человека, значит, чтобы перейти нужно совершить минимум 3 ходки по 2 человека и 2 возврата по одному человеку. Каждый человек должен перейти, следовательно, хотя бы в одной паре время будет 10. В двух других парах время не может быть меньше, чем 2. Далее рассматриваются 2 возможных случая, либо обратно всё время ходит физик (для этого он должен с каждым человек ходить в паре и суммарно получается $10+5+2+1+1$), либо когда один из возвращающихся химик, тогда и будет достигнута минимальность.

