Регата

Младшая лига

Первый тур

1a. Положительные числа x и y таковы, что $x^2 - xy = 7$ и $3xy + y^2 = 29$. Чему может быть равно $x + y$?

Ответ: 6.

Заметим, что квадрат суммы чисел x и y равен 36:

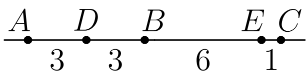
$$36 = 29 + 7 = (x^2 - xy) + (3xy + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

Поскольку числа положительны, сумма $x + y$ не может быть отрицательным числом, поэтому она равна 6. $\square$

1g. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D, E так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$?

Ответ: Да.

Пример изображен на картинке ниже.



$\square$

1c. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом могут быть выше своего правого соседа?

Ответ: 34.

Левого соседа имеют 49 человек, 34 из них ниже своего левого соседа. Для этих самых соседей (и только для них) как раз таки и верно, что каждый из них выше своего правого соседа. $\square$

Второй тур

2a. Найдите все простые числа p, q и r, такие что число $p^4 + q^4 + r^4 - 3$ тоже простое.

Ответ: тройка чисел $(2, 3, 5)$ и все ее перестановки.

Пусть $s = p^4 + q^4 + r^4 - 3$ — простое число. $s > 2^4 - 3 = 13$, поэтому s нечетно и $s \neq 3$. Если $p = q = r$, то s делится на 3 и является составным.

Поскольку s нечетно, ровно одно из чисел p, q и r равно 2. Пусть для определенности $r = 2$. Предположим, что ни одно из чисел p и q не делится на 3. Поскольку квадраты чисел, не делящихся на 3, дают остаток 1 при делении на 3, s кратно 3 и, значит, составное. Поэтому одно из (простых) чисел p,q делится на 3, т. е. равно 3, для определенности можно считать, что $q = 3$. Таким образом, осталось найти все простые числа p, для которых число $s = p^4 + 3^4 + 2^4 - 3 = p^4 + 94$ является простым. Если p не делится на 5, то p^4 дает остаток 1 при делении на 5, и значит, число $s = p^4 + 94$ составное, поскольку делится на 5. Поэтому $p = 5$. Осталось заметить, что число $s = 5^4 + 94 = 719$ является простым. □

2g. На сторонах BC и AB треугольника ABC нашлись точки L и K соответственно такие, что AL — биссектриса угла BAC, $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

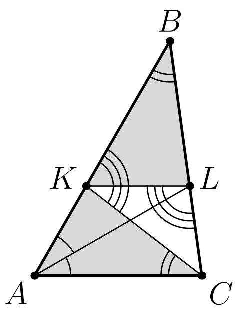


Рис. 1: к решению задачи 2g.

Заметим, что в треугольниках BLK и CKA две пары углов совпадают. Действительно, $\angle LBK = \angle ACK$ по условию; углы BLK и AKC смежны с равными по условию углами. Поэтому и третья пара углов — BKL и BAC — равны. Отсюда $KL \parallel AC$. Следовательно, треугольник LKA — равнобедренный, $LK = KA$, и тогда треугольники BLK и CKA равны (рис. 1). Тогда $BK = AC$ как соответственные стороны. □

2c. 2017 различных натуральных чисел таковы, что сумма любых двух различных из них не равна ни одному из оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

Ответ: 4032.

Легко понять, что множество чисел $\{2016, 2017, 2018, \ldots, 4032\}$ подходит под условие. Упорядочим наши числа: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2017}$. Обозначим наибольшее из них, a_{2017}, за M. По условию никакие два различных a_i и a_j не дают в сумме M.

Если M нечётно, то в каждой паре $(1, M-1)$, $(2, M-2)$, …, $(\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2})$ не более одного равно какому-то из a_i. Т.к. всего чисел a_i (кроме M)

ровно 2016, получаем оценку $\frac{M-1}{2} \geqslant 2016$, откуда $M \geqslant 4033$.

Если M чётно, то в каждой паре $(1, M-1)$, $(2, M-2)$, $\ldots$, $(\frac{M}{2}-1, \frac{M}{2}+1)$ не более одного равно какому-то из a_i, к тому же, $\frac{M}{2}$ может быть равно одному из них. Т.к. всего чисел a_i (кроме M) ровно 2016, получаем оценку $\frac{M}{2} \geqslant 2016$, откуда $M \geqslant 4032$.

Итак, в обоих случаях мы имеем $M \geqslant 4032$. □

Третий тур

3a. Сумма чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ равна 0. Известно, что

$$|x_1 - 2x_2| = |x_2 - 2x_3| = \ldots = |x_{2016} - 2x_{2017}| = |x_{2017} - 2x_1|\,.$$

Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2017} = 0$.

Пусть $x_1 - 2x_2 = a$. Тогда $x_1 - 2x_2 = \pm a$, $x_2 - 2x_3 = \pm a$, $\ldots$, $x_{2016} - 2x_{2017} = \pm a$, $x_{2017} - 2x_1 = \pm a$. Сложим эти равенства. Слева получим сумму $-(x_1 + \ldots + x_{2017})$, равную 0 по условию. Справа же мы получим $(\pm 1 \pm 1 \ldots \pm 1)a = ka$, где k — нечетное число, т. к. это сумма нечетного количества нечетных чисел. Следовательно, $k \neq 0$, поэтому $a = 0$. Таким образом,

$$x_1 - 2x_2 = x_2 - 2x_3 = \ldots = x_{2016} - 2x_{2017} = x_{2017} - 2x_1 = 0\,.$$

Если $x_1 = 0$, то, очевидно, и остальные числа равны нулю. Если $x_1 > 0$, то остальные числа также будут больше 0, и их сумма не будет равна 0. Аналогично она не может равняться 0, если $x_1 < 0$. □

3g. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, причем $BC = AO$. Точка F такова, что $CF \perp CD$ и $CF = BO$. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.

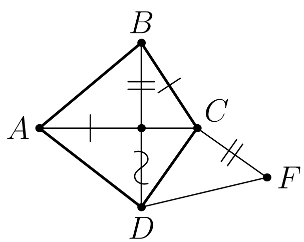


Рис. 2: к решению задачи 3g.

Есть две точки F, удовлетворяющие условию (рис. 2). Докажем, что в обоих случаях $AD = DF$. По теореме Пифагора для треугольника FDC имеем

$$DF^2 = FC^2 + CD^2 = OB^2 + CD^2\,.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора для треугольников AOD, DOC, BOC

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 = BC^2 + (CD^2 - OC^2) = (BC^2 - OC^2) + CD^2 = OB^2 + CD^2\,.$$

$\square$

3c. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

Предположим противное. Пусть игроков было n. Если один из них выиграл у троих человек, то либо два из них младше его, либо два из них старше его и, значит, нужный игрок найден. Поэтому нам осталось разобрать случай, когда каждый теннисист проиграл по крайней мере две партии, и значит, суммарное количество поражений не меньше $2n$.

Заметим, что суммарное по всем игрокам количество побед плюс суммарное количество поражений равно $4n$ (поскольку каждый сыграл 4 партии). Если кто-то проиграл хотя бы три партии, то общее количество побед строго меньше $2n$, что невозможно, поскольку суммарное количество побед равно суммарному количеству поражений. Стало быть, каждый участник обыграл двух человек.

Осталось рассмотреть самого старшего из игроков — он обыграл двух человек, и они оба младше него. $\square$

Четвертый тур

4a. Даны 11 натуральных чисел таких, что не существует простого числа, на которое каждое из них делится. Известно, что произведение любых шести из этих чисел делится на произведение пяти оставшихся. Докажите, что произведение всех 11 чисел — точный квадрат.

Выберем любое простое число p, на которое делится произведение всех данных чисел. По условию найдется число c, не кратное p. Разобьем оставшиеся числа на две группы по 5 чисел в каждой и обозначим произведения чисел в этих группах a и b. Из условия следует, что ac делится на b и bc делится на a. Это означает, что p входит в разложение чисел a и b в равных степенях, поскольку в разложение c оно вообще не входит. Следовательно, в произведение всех чисел (равное abc) простое число p входит в четной степени. Т. к. это верно для всех простых множителей произведения, то оно является точным квадратом. $\square$

4g. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка P такая, что $2AP = BC$. Точки X и Y симметричны точке P относительно вершин A и C. Оказалось, что $BX = BY$. Чему равен угол C исходного треугольника?

Ответ: $60°$.

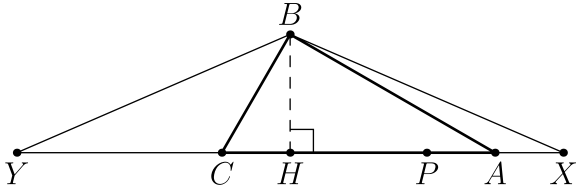


Рис. 3: к решению задачи 4g.

Опустим перпендикуляр BH на сторону AC (рис. 3). Поскольку $BX = BY$, то точка H — середина XY. Тогда

$$CH = YH - CY = \frac{XY}{2} - CP = AC - CP = AP = \frac{BC}{2}.$$

Следовательно, в прямоугольном треугольнике BCH катет CH вдвое короче гипотенузы BC, поэтому $\angle C = 60°$. □

Другое решение. Пусть $AP = a$, $CP = c$, тогда $XY = 2a + 2c$. Отметим

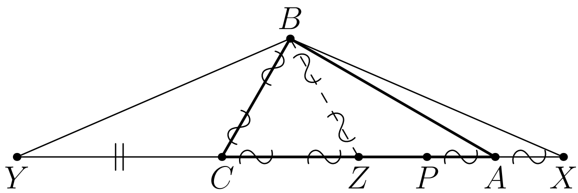


Рис. 4: к другому решению задачи 4g.

точку Z на отрезке XY так, что $XZ = c$ (рис. 4). Тогда $ZC = XY - 2c = 2a = BC$. С другой стороны, из симметрии $(XZ = CY)$ ясно, что $BC = BZ$. Следовательно, треугольник BCZ равносторонний. □

4c. В каждой клетке таблицы 2017×2017 стоят числа 1 или -1. Пусть x_i — произведение чисел в i-ой строке, а y_j — произведение чисел в j-ом столбце. Может ли так оказаться, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} + y_1 + \ldots + y_{2017} = 0$?

Ответ: Нет.

Предположим противное. Пусть X — количество чисел среди $x_1, \ldots, x_{2017}$, равных -1, а Y — количество чисел среди $y_1, \ldots, y_{2017}$, равных -1. Тогда $X + Y = 2017$, то есть X и Y имеют разную четность, то есть

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_{2017} \neq y_1 \cdot y_2 \cdot y_{2017} \cdot$$

С другой стороны, оба произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2017}$ и $y_1 \cdot \ldots \cdot y_{2017}$ равны произведению всех чисел таблицы. Противоречие. $\square$

Старшая лига

Первый тур

1a. Числа $\sin 17°$ и $\sin 73°$ являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $a^2 + 2ac = b^2$.

Пусть $x_1 = \sin 17°$ и $x_2 = \sin 73°$. Так как $\sin 73° = \cos 17°$, то по основному тригонометрическому тождеству $x_1^2 + x_2^2 = \sin^2 17° + \cos^2 17° = 1$. С другой стороны, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ по теореме Виета. Следовательно,

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-b/a)^2 - 2c/a = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}\,.$$

Умножив полученное равенство $\frac{b^2-2ac}{a^2} = 1$ на a^2 и перенеся $2ac$, получим требуемое. $\square$

1g. AD — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точка E симметрична точке A относительно середины BC. Докажите, что $DE \perp BC$.

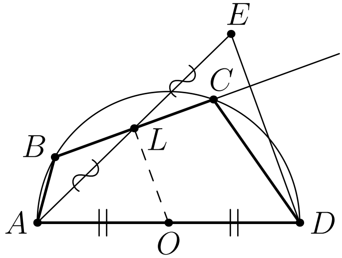


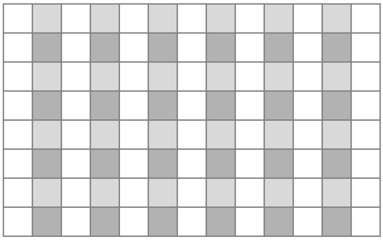
Рис. 5: к решению задачи 1g.

Пусть O — центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, а L — середина стороны BC (рис. 5). Поскольку треугольник OBC равнобедренный, то $OL \perp BC$. Так как $AO = OD$ и $AL = LE$, то OL — средняя линия в треугольнике AED. Отсюда получаем искомую перпендикулярность. $\square$

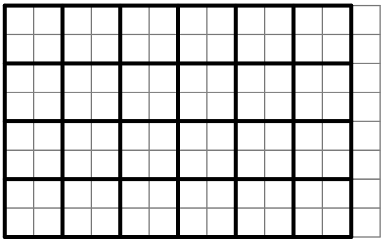
1c. Саша отметил несколько клеток таблицы 8×13 так, что в любом квадратике 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сашей?

Ответ: 48 клеток.

Пример. Покрасим таблицу «зеброй» вдоль четной стороны и возьмем цвет, который в меньшинстве. Пусть на первом шаге Саша отметит в каждой полосе каждую вторую из выбранных клеток, а на втором — отметит остальные клетки данного цвета.



Оценка. Возьмем 24 непересекающихся квадрата 2×2, как показано на рисунке. В каждом из них не менее двух отмеченных клеток, значит, всего отмеченных клеток не менее 48.



$\square$

Второй тур

2a. Докажите, что значение выражения

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]$$

четно при любом натуральном n.

Докажем утверждение индукцией по n. Для $n=1$ утверждение очевидно. Докажем переход. Пусть d — количество делителей числа $n+1$. Рассмотрим разность выражений для n и $n+1$:

$$\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]+\left[\sqrt{n+1}\right]-$$
$$-\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]\right)=$$
$$=\left(\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n}{1}\right]\right)+\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\left[\frac{n+1}{n+1}\right]-\left[\frac{n}{n+1}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{n+1}\right]-\left[\sqrt{n}\right]\right).$$

Заметим, что разность $\left[\frac{n+1}{i}\right]-\left[\frac{n}{i}\right]$ равна 1, если i является делителем числа $n+1$, и равна 0 в противном случае. Таким образом, разность равна $d+\left(\left[\sqrt{n+1}\right]-\left[\sqrt{n}\right]\right)$. Если $n+1$ не является квадратом числа, то d четно (поскольку все его делители разбиваются на пары, произведение внутри которых равно n) и $\left[\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{n}\right]$, поэтому разность равна d, то есть четному числу.

Если же $n+1$ — это квадрат, то d нечетно (поскольку все делители, кроме $\sqrt{n+1}$ разбиваются на пары) и $\left[\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{n}\right]+1$, поэтому разность равна $d+1$, то есть четному числу. В обоих случаях переход доказан. □

2g. Центр I вписанной окружности остроугольного треугольника ABC лежит на биссектрисе острого угла между высотами AA_1 и CC_1. Пусть L — основание биссектрисы угла B треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, I, L, C лежат на одной окружности.

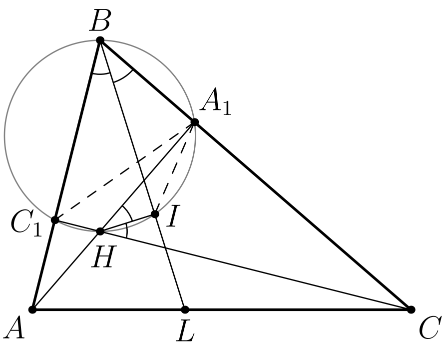


Рис. 6: к решению задачи 2g.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда $\angle A_1HC=\angle B$ (так как четырехугольник BA_1HC_1 вписанный), поэтому $\angle A_1BI=\angle A_1HI=\angle B/2$ (рис. 6). Отсюда точки B, A_1, I, H лежат на одной окружности с диаметром BH. На этой же окружности, очевидно, лежит точка C_1. Тогда $\angle A_1IB=\angle A_1C_1B=\angle ACB$ (последнее равенство верно в силу того, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный), откуда $\angle A_1IL + \angle ACB = 180°$. □

2c. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели?

Ответ: Костя сможет добиться своей цели.

В этой задаче неважно, как расположены карточки. Пусть карточки расположены в виде таблицы 2×25: в первой строке выложены карточки с числами от 1 до 25 по возрастанию, а под ними во второй строке — карточки с числами от 26 до 50 тоже по возрастанию.

Наблюдая за игрой, будем говорить, что столбец в этой таблице *неполный*, если из него взята одна карточка, и *полный* — если обе карточки еще не взяты. Заметим, что числа, стоящие в одном столбце, отличаются на 25 и поэтому дают одинаковые остатки при делении на 25.

Выигрышная стратегия Кости состоит в том, чтобы взять из каждого столбца ровно одну карточку. Тогда сумма чисел на Костиных карточках будет иметь такой же остаток при делении на 25, как и сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + 24 + 0 = 300$ т. е. будет делиться на 25. Значит, Костя выиграет.

Следовать этой стратегии совсем нетрудно. Первым ходом Костя берет карточку из любого столбца и запоминает, что больше из этого столбца он карточек брать не будет. Таким образом, перед ходом Виталика на столе имеется ровно один неполный столбец, причем карточку из него взял Костя. После того как Виталик сделает свой ход, на столе будет не более двух неполных столбцов. Точнее говоря, не будет ни одного неполного столбца, если Виталик возьмет карточку из неполного столбца, либо будет ровно два неполных столбца, если Виталик возьмет карточку из какого-то полного столбца. В первом случае Костя возьмет карточку из любого столбца, во втором случае — из того, где только что взял карточку Виталик. В обоих случаях после Костиного хода на столе остался ровно один неполный столбец, из которого Костя уже брал карточку. Ситуация повторилась. Играя таким образом дальше, Костя добьется своей цели. □

Третий тур

3a. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что для любого его простого делителя p число n делится на $p - 1$, но не делится на p^2.

Ответ: $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$.

Заметим, что число 1806 подходит: оно делится на каждое из чисел $1, 2, 6, 42$, но не делится ни на одно из чисел $2^2, 3^2, 7^2, 43^2$.

Предположим, существует $n > 2{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}43$, подходящее под условие. Хотя бы одно из чисел p и $p-1$ является четным, поэтому и n четно. Значит, у него есть простой делитель 2 (и n не делится на 2^2). Пусть $p > 2$ — его следующий по величине простой делитель, и $n = 2pk$, где у числа k все простые делители больше p. По условию число $2pk$ делится на $p-1$, но pk взаимно просто с $p-1$ (т. к. все его простые делители больше $p-1$), поэтому 2 делится на $p-1$, и $p = 3$ (и n не делится на 3^2).

Пусть $q \geqslant 5$ — следующий по величине простой делитель, и $n = 6ql$, где у числа l все простые делители больше q. По условию число $6ql$ делится на $q-1$, но ql взаимно просто с $q-1$ (т. к. все его простые делители больше $q-1$), поэтому 6 делится на $q-1 \geqslant 4$, и $q = 7$ (и n не делится на 7^2).

Пусть $r \geqslant 11$ — следующий по величине простой делитель, и $n = 42rt$, где у числа t все простые делители больше r. По условию число $42rt$ делится на $r-1$, но rt взаимно просто с $r-1$ (т. к. все его простые делители больше $r-1$), поэтому 42 делится на $r-1 \geqslant 10$. Число r — простое и равно делителю 42, увеличенному на 1, который больше 10. Следовательно, $r = 43$ (и n не делится на 43^2).

Пусть $s \geqslant 47$ — следующий по величине простой делитель, и $n = 42 \cdot 43sm$, где у числа m все простые делители больше s. По условию число $42 \cdot 43sm$ делится на $s-1$, но sm взаимно просто с $s-1$ (т. к. все его простые делители больше $s-1$), поэтому $42 \cdot 43$ делится на $s - 1 \geqslant 46$. Число s — простое и равно увеличенному на 1 четному делителю числа 1806 (этот делитель больше 43 и четен, т. к. s нечетно). У этого числа таких делителей всего четыре: $2 \cdot 43 = 86$, $2 \cdot 3 \cdot 43 = 258$, $2 \cdot 7 \cdot 43 = 602$, $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$. Но все эти числа, увеличенные на 1, составные: 87 и 603 делятся на 3, 259 делится на 7, 1807 делится на 13. Противоречие. $\square$

3g. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Оказалось что точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A, лежат на одной прямой с точкой A. Докажите, что основания перпендикуляров из P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC.

Пусть M — середина стороны BC, X, Y, Z — проекции точки P на стороны AB, AC и биссектрису угла A соответственно (рис. 7). Сделаем гомотетию с центром в точке P и коэффициентом $1/2$. Получим, что точки M, Z и середина AP (обозначим ее за N) лежат на одной прямой. Заметим, что точки A, P, X, Y, Z лежат на окружности с диаметром AP, причем точка Z является серединой дуги XPY этой окружности, поэтому точки N и Z лежат на серединном перпендикуляре к отрезку XY. Отсюда точка M также лежит на серединном перпендикуляре к XY, то есть $MX = MY$. $\square$

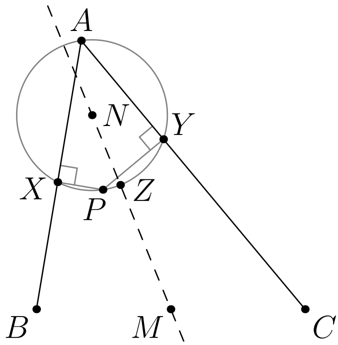


Рис. 7: к решению задачи 3g.

3c. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы AB, BC, CD, был и рейс AD. Сколько существует способов это сделать?

Ответ: 2^{99} способов.

Заметим, что из любого города до любого другого можно долететь с не более чем одной пересадкой. Действительно, из условия следует, что любой пусть с двумя и более пересадками можно сократить. Рассмотрим произвольный город A. Города, в которые ведут рейсы из A, назовем *ближними*, а остальные города — *дальними*. Рассмотрим произвольный дальний город D. Как мы выяснили, он соединен с одним из ближних городов B_1. Для любого другого ближнего города B_2, рассматривая маршрут $B_2–A–B_1–D$, видим, что D и B_2 также соединены. Значит, любой дальний город соединен с любым ближним. Назовем город A также дальним, указанное свойство сохранится. Получим, что все города разбиты на две непустые группы, города из разных групп соединены попарно. Если больше рейсов нет, то такая система рейсов подходит, и выбрать ее можно $2^{99}-1$ способами (если зафиксируем город A, любой из остальных городов должен быть либо дальним, либо ближним, при этом запрещено лишь, чтобы все города были дальними). Если же есть хотя бы один рейс между городами одной группы, то несложно видеть, что в этом случае любые два города соединены рейсом. Такая система рейсов также подходит. Итого, $2^{99}-1+1=2^{99}$. □

Четвертый тур

4a. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{1962}{2018}} < \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} < \sqrt{\frac{1963}{2019}}\,.$$

Заметим, что при $0 < m < n$ верно $1 - \frac{1}{m+1} < 1 - \frac{1}{n+1}$, что означает $\frac{m}{m+1} < \frac{n}{n+1}$.

Пусть $A = \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} > 0$. По доказанному выше имеем

$$A > \frac{1962}{1963} \cdot \frac{1964}{1965} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2017}\,.$$

Следовательно,

$$A^2 > \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} \cdot \frac{1962}{1963} \cdot \frac{1964}{1965} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2017} = \frac{1962}{2018}\,,$$

откуда $A > \sqrt{\frac{1962}{2018}}$.

Аналогично доказывается и второе неравенство: $A < \frac{1964}{1965} \cdot \frac{1966}{1967} \cdot \ldots \cdot \frac{2018}{2019}$, поэтому $A^2 < \frac{1963}{2019}$, и $A < \sqrt{\frac{1963}{2019}}$. $\square$

4g. На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри треугольника нашлась такая точка L, что $\angle LBC = \angle LCA = \angle LAB$. Докажите, что длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию.

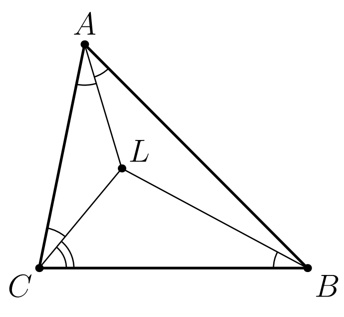


Рис. 8: к решению задачи 4g.

Рис. 8. Пусть $\angle LBC = \alpha$, $\angle LCB = \beta$. Тогда $\angle CLB = 180^\circ - \alpha - \beta$. По теореме синусов для треугольников LBC и LCA

$$\frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}\,.$$

По теореме синусов для треугольника ABC

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}\,.$$

Объединив эти два равенства, получим $BC : AC = AB : BC$. $\square$

Другое решение. Рис. 9. Отметим на луче AL за точкой L такую точку

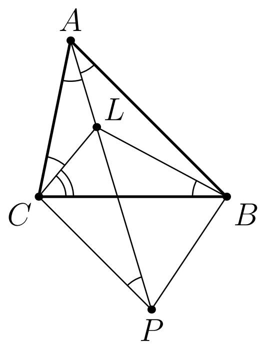


Рис. 9: к другому решению задачи 4g.

P, что $PC = CA$. Заметим, что $\angle ACP = \pi - 2\angle CAL = \angle ACB + \angle ABC$, поэтому точки P и A лежат по разные стороны относительно прямой BC и $\angle PCB = \angle ABC$.

Поскольку $\angle CPL = \angle CAL = \angle LBC$, то четырехугольник $CLBP$ вписанный и

$$\angle CBP = \angle CLP = \angle ACL + \angle CAL = \angle CAB.$$

Значит, треугольники ABC и BCP подобны и $CB/AB = CP/BC = AC/CB$. $\square$

Ещё решение. Рис. 10. Отметим точку L', изогонально сопряженную точ-

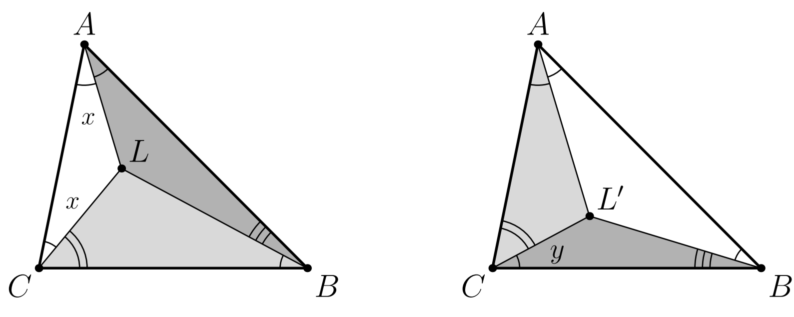


Рис. 10: к еще одному решению задачи 4g.

ке L (вторую точку Брокара). Ясно, что она лежит на той же биссектрисе. Кроме того, из равенства углов следуют подобия треугольников: $\triangle ALB \sim \triangle CL'B$ и $\triangle BLC \sim \triangle AL'C$. Пусть $AL = LC = x$ и $CL' = y$. Тогда из указанных подобий следует соответственно $AB : x = BC : y$ и $BC : x = AC : y$. Отсюда получаем требуемое. $\square$

4c. Дана таблица 2017×2017, в каждой клетке стоит «+» или «−». За одну операцию разрешается поменять все знаки в кресте на противоположные (крест — объединение произвольного столбца и произвольной строки). Верно ли, что из любого начального расположения можно получить таблицу со всеми плюсами?

Ответ: Нет.

Раскрасим всю таблицу в шахматном порядке. Если угловая клетка черная, то в любом кресте белых клеток будет четное число. Рассмотрим начальную позицию, где во всех клетках стоят минусы, а в одной белой стоит плюс, тогда после применения операции четность количества плюсов на белых клетках не изменится. Изначально плюс только один, нечетное число, а в таблице со всеми плюсами их количество четное. Противоречие. $\square$