Регата

Младшая лига

Первый тур

1a. Положительные числа x и y таковы, что $x^2 - xy = 7$ и $3xy + y^2 = 29$. Чему может быть равно $x + y$?

1g. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D, E так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$?

1c. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом могут быть выше своего правого соседа?

Второй тур

2a. Найдите все простые числа p, q и r, такие что число $p^4 + q^4 + r^4 - 3$ тоже простое.

2g. На сторонах BC и AB треугольника ABC нашлись точки L и K соответственно такие, что AL — биссектриса угла BAC, $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

2c. 2017 различных натуральных чисел таковы, что сумма любых двух различных из них не равна ни одному из оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

Третий тур

3a. Сумма чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ равна 0. Известно, что

$$|x_1 - 2x_2| = |x_2 - 2x_3| = \ldots = |x_{2016} - 2x_{2017}| = |x_{2017} - 2x_1|.$$

Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2017} = 0$.

3g. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, причем $BC = AO$. Точка F такова, что $CF \perp CD$ и $CF = BO$. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.

3c. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

Четвертый тур

4a. Даны 11 натуральных чисел таких, что не существует простого числа, на которое каждое из них делится. Известно, что произведение любых шести из этих чисел делится на произведение пяти оставшихся. Докажите, что произведение всех 11 чисел — точный квадрат.

4g. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка P такая, что $2AP = BC$. Точки X и Y симметричны точке P относительно вершин A и C. Оказалось, что $BX = BY$. Чему равен угол C исходного треугольника?

4c. В каждой клетке таблицы 2017×2017 стоят числа 1 или -1. Пусть x_i — произведение чисел в i-ой строке, а y_j — произведение чисел в j-ом столбце. Может ли так оказаться, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} + y_1 + \ldots + y_{2017} = 0$?

Старшая лига

Первый тур

1a. Числа $\sin 17^\circ$ и $\sin 73^\circ$ являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $a^2 + 2ac = b^2$.

1g. AD — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точка E симметрична точке A относительно середины BC. Докажите, что $DE \perp BC$.

1c. Саша отметил несколько клеток таблицы 8×13 так, что в любом квадратике 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сашей?

Второй тур

2a. Докажите, что значение выражения

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] + [\sqrt{n}]$$

четно при любом натуральном n.

2g. Центр I вписанной окружности остроугольного треугольника ABC лежит на биссектрисе острого угла между высотами AA_1 и CC_1. Пусть L — основание биссектрисы угла B треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, I, L, C лежат на одной окружности.

2c. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели?

Третий тур

3a. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что для любого его простого делителя p число n делится на $p-1$, но не делится на p^2.

3g. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Оказалось что точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A, лежат на одной прямой с точкой A. Докажите, что основания перпендикуляров из P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC.

3c. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы AB, BC, CD, был и рейс AD. Сколько существует способов это сделать?

Четвертый тур

4a. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{1962}{2018}} < \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} < \sqrt{\frac{1963}{2019}}.$$

4g. На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри треугольника нашлась такая точка L, что $\angle LBC = \angle LCA = \angle LAB$. Докажите, что длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию.

4c. Дана таблица 2017×2017, в каждой клетке стоит «+» или «−». За одну операцию разрешается поменять все знаки в кресте на противоположные (крест — объединение произвольного столбца и произвольной строки). Верно ли, что из любого начального расположения можно получить таблицу со всеми плюсами?