Геометрия

Младшая лига

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD угла B. Перпендикуляр к BD в точке D пересекает прямую BC в точке E. Найдите BE, если $CD = d$. *(А. А. Егоров)*

Ответ: $2d$.

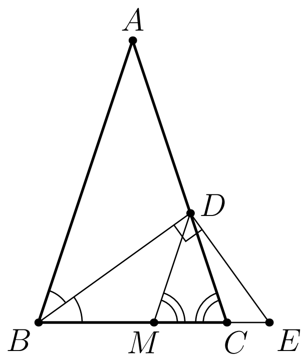


Рис. 1: к решению задачи 1.

Проведем в прямоугольном треугольнике BDE медиану DM (рис. 1). Тогда $MB = MD = ME$. Поскольку треугольник BMD равнобедренный, то $\angle MDB = \angle MBD = \angle DBA$, следовательно, $DM \parallel AB$ и $\angle DMC = \angle ABC = \angle ACB$. Значит и треугольник DMC равнобедренный, т. е. $DM = DC = d$. Отсюда получаем, что $BE = 2DM = 2d$. □

2. Бильярдный стол имеет форму *параллелограмма.* Два шара, поставленные у середины одного из бортов, ударили так, что они отразились от разных соседних бортов, после чего оба попали в одну и ту же точку на противоположном борте. Один шар прошел до отскока вдвое большее расстояние, чем после. Найдите отношение длин отрезков пути до и после отскока для другого шара. *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: $2 : 3$.

Пусть A — точка старта шаров, а B — точка, куда они попадают, и пусть расстояния от A до бортов, в которые ударяются шары, равно a. Поскольку по закону отражения угол между бортом стола и траекторией шара до удара о него равен аналогичному углу после удара, то длины отрезков траектории до и после удара пропорциональны расстояниям от точек A и B до этого борта. Поэтому расстояние от точки B до борта, от которого отразился первый шар, равно $a/2$, а до противоположного борта — $3a/2$

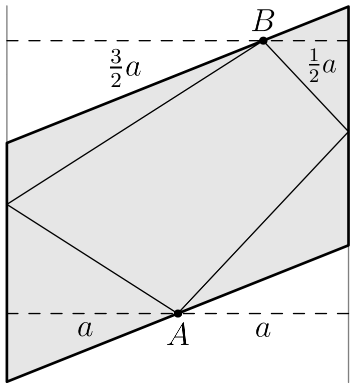


Рис. 2: к решению задачи 2.

(рис. 2). Следовательно, отношение отрезков пути второго шара равно $a : \frac{3a}{2} = 2 : 3$. □

3. На отрезке AB по разные стороны от него построены правильный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD, в котором $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$. Описанная окружность первого треугольника пересекает медиану DM второго в точке K. Найдите отношение $AK : KB$.

(Вариация задачи Nguyen Dung Thanh из Cut-the-knot)

Ответ: $AK : KB = 2 : 1$.

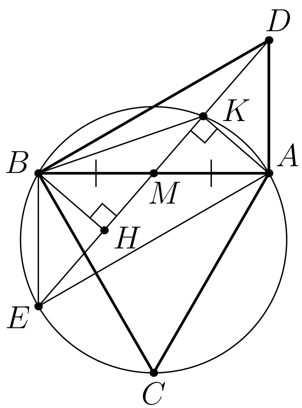


Рис. 3: к решению задачи 3.

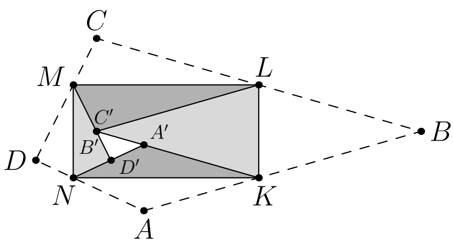
Рассмотрим точку E, диаметрально противоположную точке B (рис. 3). Поскольку BE — диаметр, то $AE \perp AB$, а т. к. BE — биссектриса правильного треугольника ABC, то $\angle ABE = 30^\circ$. Отсюда получаем, что в четырехугольнике $ADBE$ противоположные стороны параллельны, т. е.

это параллелограмм, и следовательно, точка M является серединой DE. Угол BKE, как и BAE, опирается на диаметр BE, и потому тоже равен $90°$, а по теореме о вписанном угле $\angle AKE = 30°$ (опирается на ту же дугу, что и $\angle ABE$). Опустим из точки A перпендикуляр AH на DE. Тогда $AH = BK$, т. к. прямоугольные треугольники AMH и BMK равны. А поскольку $\angle AKE = 30°$, то $AK = 2AH = 2BK$. $\square$

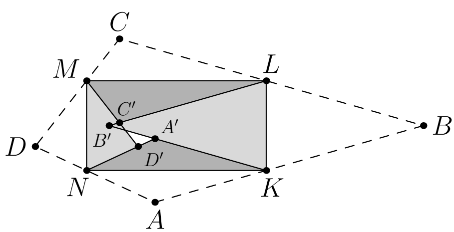
4. На сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник и $AK < KB$, $BL > LC$ и $CM < MD$. Может ли площадь этого прямоугольника быть больше половины площади четырехугольника $ABCD$? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: Может.

Стороны прямоугольника отрезают от четырехугольника четыре треугольника. Покажем, что общая площадь этих треугольников может быть меньше площади прямоугольника (тогда последняя будет больше половины площади четырехугольника). «Загнем» треугольники внутрь прямоугольника. Пусть A', B', C', D' — вершины «загнутых» треугольников, т. е. точки, симметричные A, B, C, D относительно соответствующих сторон прямоугольника. Заметим, что, например, $\angle AKN + \angle BKL = 90°$. Поэтому углы «загнутых» треугольников с общей вершиной K полностью покроют угол K прямоугольника, но перекрываться друг с другом не будут. Точнее, в силу неравенства $AK < KB$, точка A' попадет внутрь отрезка KB'. Аналогично, C' попадет внутрь отрезков LB' и MD', то есть C' будет пересечением этих отрезков. О точке D' мы знаем только то, что она попадет на луч NA'. Обратно, если мы зададим точки A', B', C', D' внутри прямоугольника так, чтобы соблюдались указанные условия, то отразив их относительно его сторон, получим вершины четырехугольника $ABCD$, удовлетворяющего, вместе с прямоугольником, условиям задачи.



(a)



(b)

Рис. 4: к решению задачи 4.

Объясним, как выбрать эти точки так, чтобы общая площадь треугольников была меньше площади прямоугольника. Возьмем точку B' на отрезке, соединяющем середины сторон KL и MN, ближе к стороне MN. В качестве A' возьмем середину отрезка KB'. Проведем отрезок MB' и продолжим его до пересечения с NA' в точке D' (рис. 4a). Возьмем $C' = B'$, тогда сумма площадей треугольников $KB'L$, $LC'M$, $MD'N$ и $NA'K$ меньше площади прямоугольника, т. к. они не перекрываются, а треугольник $A'B'D'$ не закрыт. При этом все наши условия, кроме неравенства $LC' < LB'$ будут выполнены. Если чуть-чуть сдвинуть точку C' внутрь отрезка $B'L$ (рис. 4b), то и это условие будет соблюдено, а сумма площадей треугольников изменится незначительно (можно сделать это изменение сколь угодно малым), т. е. по-прежнему будет меньше площади прямоугольника. □

Старшая лига

1. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что его высота CD и биссектриса BE пересекаются в такой точке M, что $CM = 2MD$ и $BM = ME$.

(А. А. Егоров)

Ответ: $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$.

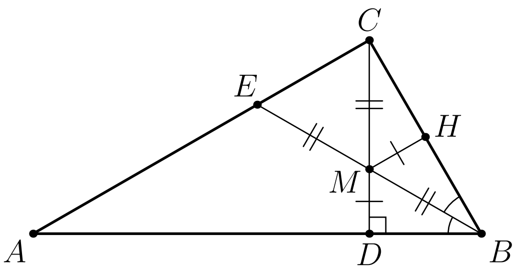


Рис. 5: к решению задачи 1.

Проведем из точки M перпендикуляр MH к BC (рис. 5). Поскольку точки биссектрисы угла равноудалены от его сторон, $MH = MD$, то есть в прямоугольном треугольнике CMH катет MH вдвое короче гипотенузы CM. Следовательно, $\angle MCH = \angle DCB = 30°$, а значит, $\angle DBC = 90° - 30° = 60°$, откуда $\angle CBM = \angle DBM = 30°$, а $\angle DMB = 60°$. В треугольнике BCM углы при вершинах B и C равны, поэтому он равнобедренный: $MC = MB = ME$. А поскольку $\angle CME = \angle DMB = 60°$, то треугольник EMC равносторонний, $\angle ECM = 60°$ и $\angle ACB = 60° + 30° = 90°$. □

2. Существует ли описанный 27-угольник, длины сторон которого равны 1, 2, ..., 27? (Стороны могут располагаться в произвольном порядке.)

(предложил И. А. Шейпак)

Ответ: не существует.

Пусть длины сторон (по часовой стрелке) равны $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$, a_{27}. Точками касания стороны делятся на отрезки длин:
1-ая сторона: x и $a_1 - x = 1 - x$, $x \in (0; 1)$;
2-ая сторона: $a_1 - x$ и $a_2 - a_1 + x$;
$\ldots$
27-ая сторона: $a_{26} - a_{25} + a_{24} - \ldots - a_1 + x$ и $a_{27} - a_{26} + a_{25} - \ldots - a_2 + a_1 - x$. Значит, $x = a_{27} - a_{26} + a_{25} - \ldots - a_2 + a_1 - x$. Поскольку a_j целые, а $x \in (0; 1)$, то $x = 1/2$. Тогда

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{27} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{26} + 1.$$

Значит, число $a_1 + a_2 + \ldots + a_{27} = 1 + 2 + \ldots + 27 = \frac{27 \cdot 28}{2} = 27 \cdot 14$ должно быть нечетно. Противоречие. $\square$

3. В кубическом ящике размером $1 \times 1 \times 1$ лежат 8 деревянных шаров. Может ли сумма их радиусов быть больше 2? *(В. Н. Дубровский, К. А. Кноп)*

Ответ: может.

Положим на дно ящика в его противоположные углы два равных шара радиуса R, каждый из которых касается другого и двух стенок ящика. (Эти шары будут вписаны в треугольные призмы, на которые ящик делится вертикальной диагональной плоскостью.) Рассмотрим шары, симметричные этим двум относительно оси, проходящей через центры двух противоположных боковых стенок. Ясно, что они будут вписаны в верхние углы ящика и все 4 шара будут касаться друг друга; центры всех 4 шаров образуют тетраэдр.

Теперь в два свободных нижних угла ящика положим равные шары меньшего радиуса r так, чтобы каждый из них касался двух стенок и двух больших шаров: можно сначала закатить в угол шар очень маленького радиуса, а потом начать его «раздувать», пока он не коснется одного (а значит, и второго) большого шара. Такие же шары поместим в два последних свободных угла — при крышке.

Оценим сумму радиусов шаров. Рассмотрим 4 нижних шара (рис. 6). Разобьем их на две пары из касающихся друг друга большого и малого шаров. Пусть O_1 и O_2 — их центры, T_1 и T_2 — точки их касания с параллельными боковыми стенками. Длина ломаной $T_1O_1O_2T_2$ равна $R + (R + r) + r = 2(R + r)$. В то же время она больше ребра куба, так как его длина, очевидно, равна наименьшему расстоянию между точками параллельных граней. Итак, $2(R + r) > 1$, а сумма всех 8 радиусов $4(R + r) > 2$. $\square$

4. На стороне ML квадрата $KMLN$ вне него построен прямоугольный треугольник CML. Катеты CM и CL продолжены до пересечения с прямой KN в точ-

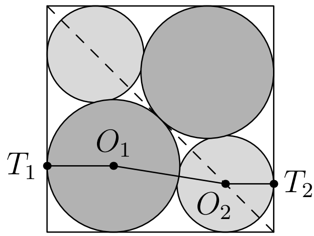


Рис. 6: к решению задачи 3.

ках A и B соответственно. Отрезок AL пересекает KM в точке P, BM пересекает NL в точке Q. Докажите, что треугольник CPQ равнобедренный.

(Stan Fulger)

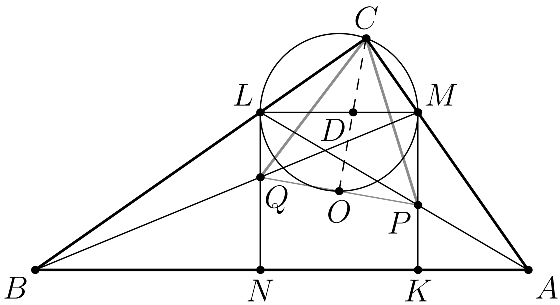


Рис. 7: к решению задачи 4.

Рис. 7. Из очевидного подобия треугольников AKP и LMP следует, что $KP : PM = AK : LM = AK : KM = AC : CB$ (т. к. $\triangle AKM \sim \triangle ABC$). Аналогично получим, что и $LQ : QN = AC : CB$. Таким образом, точки P и Q делят стороны KM и LN квадрата в равных отношениях, а значит, они симметричны относительно его центра O. Рассматривая окружность с диаметром ML, которая, очевидно, проходит через C и O, видим, что CO — биссектриса угла LCM (т. к. дуги MO и OL равны). Поэтому CO пересекает сторону ML в точке D, делящей ее в отношении $MD : DL = CM : CL = CA : CB$, т. е. так же, как P и Q делят соответствующие стороны квадрата. Поэтому точка D получается из P поворотом вокруг O на $90°$, т. е. $\angle POD = 90°$. Следовательно, CO — высота, а также и медиана треугольника CPQ. Отсюда и следует, что $CP = CQ$. $\square$