3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

8 класс

1. Торговец апельсинами привёз на ярмарку 100 коробок. Назовём коробку *забитой*, если в ней не менее 20 апельсинов. Назовём апельсин *генномодифицированным*, если он занимает более 1/5 коробки, иначе назовём его *натуральным.* В некоторый момент оказалось, что 50 коробок забито. Какую наименьшую долю от общего числа апельсинов могут составлять натуральные апельсины в этот момент?

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Решение. В коробке может находиться не более 4 генномодифицированных апельсинов. Поэтому в каждой забитой коробке не менее 16 натуральных апельсинов, то есть количество натуральных апельсинов не меньше, чем $16 \cdot 50 = 800$. Генномодифицированных апельсинов не больше, чем $4 \cdot 100 = 400$. Поэтому доля натуральных апельсинов не менее $\frac{800}{400+800} = \frac{2}{3}$. Если же в каждой коробке рово 4 генномодифицированных апельсина, а в 50 коробках по 16 натуральных, то доля натуральных апельсинов будет равна $\frac{2}{3}$.

Критерии. Утверждается, что в забитом ящике обязательно ровно 16 натуральных апельсинов — минус 2 балла.

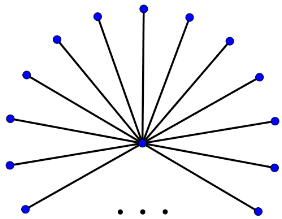
Забыто, что в незабитых ящиках могут находиться апельсины — минус 1 балл.

Считается, что в ящик помещается 5 генномодифицированных апельсинов — минус 1 балл.

2. В волшебной стране 2017 городов, в одном из них находится могущественная ведьма, а в остальных 2016 — по гениальному инквизитору. Между некоторыми из городов имеется дорога, причем из каждого города можно попасть в каждый (возможно, с пересадками). Каждый день они перемещаются в соседний город: ведьма перелетает на метле, а инквизиторы скачут на лощди. Если инквизитор и ведьма оказываются в одном городе, то ведьму сжигают на костре. Может ли ведьма гарантировано избежать возмездия при какой-нибудь системе дорог?

Ответ. Может.

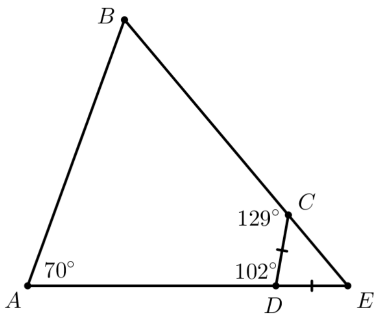
Решение. Преположим, система дорог такая, как на картинке, ведьма находится в центральном городе, а инквизиторы — во всех остальных. Очевидно, что ведьму никогда не поймают.



3. В четырёхугольнике $ABCD$ известны величины трёх углов: $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 129^\circ$, $\angle D = 102^\circ$. Что больше: AB или $AD + CD$?

Ответ. $AD + CD$ больше.

Решение. Продлим лучи AD и BC до пересечения в точке E (они пересекуться, поскольку $\angle ADC + \angle BCD > 180^\circ$). Тогда $\angle CDE = 78^\circ$, $\angle ECD = 51^\circ$, $\angle DEC = 180^\circ - 78^\circ - 51^\circ = 51^\circ$. Отсюда треугольник CDE равнобедренный и $CD = DE$. В треугольнике ABE напротив стороны AB лежит угол в 51°, а напротив стороны AE — угол в 59°. Поскольку напротив большего угла лежит большая сторона, то $AB < AE = AD + CD$.



4. Для каждого натурального числа n обозначим через $S(n)$ сумму остатков при делении на все числа, меньшие n. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $S(n) = S(n + 1)$.

Решение. Докажем, что числа вида $n = 2^k - 1$ удовлетворяет условию. Рассмотрим какое-нибудь число, меньшее $n + 1$. Возможно 2 случая:

- Это число равно степени двойки, то есть имеет вид 2^l, где $l < k$. Тогда остаток от деления $2^k - 1$ на 2^l равен $2^l - 1$, поэтому его вклад в $S(n)$ был равен $2^l - 1$, а вклад в $S(n+1)$ равен 0. Суммарно вклад от степеней двоек уменьшится на

$$(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\ldots+(2^{k-1}-1) = (1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{k-1})-k =$$
$$= (2-1)\cdot(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{k-1}) - k = 2^k - k - 1.$$

- Это число не равно степени двойки. Тогда оно не делит $n+1$, поэтому его вклад в $S(n+1)$ на 1 больше, чем вклад в $S(n)$. Суммарно вклад от не степеней двойки увеличится на их количество, то есть на $(2^k-1)-k$.

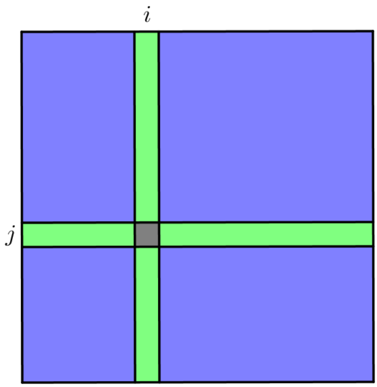
Суммируя, получаем, что $S(n) = S(n+1)$.

Критерии. Утверждается, что $n = 2^k - 1$ подходит — 1 балл.

5. У Карлсона есть квадратная плитка шоколада с фундуком со стороной 40. В каждой дольке шоколада либо есть орех, либо нет. Карлсон считает шоколадку *вкусной*, если при любом её разломе на две прямоугольные плитки хотя бы в одной из частей будет не меньше 40 орехов. Какое наименьшее число орехов может быть во вкусной шоколадке?

Ответ. 53.

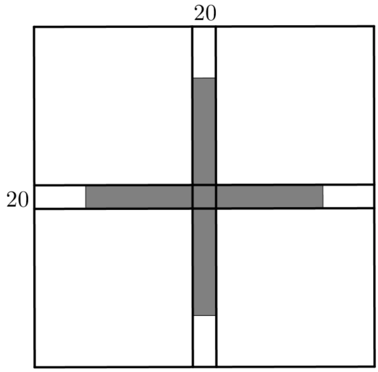
Решение. Будем последовательно рассматривать прямоугольники, состоящие из первого столбца, первых двух столбцов и т.д.. Найдём такой столбец, что если он не включён в прямоугольник, то сумма в прямоугольнике меньше 40, а если включён — то не меньше 40. Пусть он имеет номер i. Аналогично найдём строку (пусть она имеет номер j). Пусть в дольке (на рисунке изображена чёрным) на пересечении i-ого столбца и j-ой строки a орехов (a равно 0 или 1), во всех остальных клетках i-ого столбца и j-ой строки b орехов (на рисунке изображены зелёным), а во всех остальных дольках c орехов (на рисунке изображены синим).



Проссумируем количество орехов 4 прямоугольников: правее столбца i (включая i-ую строку), левее столбца i (включая i-ый столбец), ниже строки j (включая строку j), выше строки j (включая строку j). С одной стороны, эта сумма равна $4a+3b+2c$. С другой стороны, количество орехов в каждом прямоугольнике не меньше 40, поэтому сумма не меньше 160. Тогда

$$4a+3b+2c \geqslant 160 \quad \Rightarrow \quad 3(a+b+c) \geqslant 160-a \quad \Rightarrow \quad a+b+c \geqslant 159/3 = 53.$$

Поскольку $a+b+c$ — это суммарное количество орехов, то суммарное количество орехов не меньше 53. Осталось показать, что 53 орехов достаточно. Разместим орех в 20 строчке и 20 столбце, а также вверх, вниз, вправо и влево разместим по 12 орехов. Несложно понять, что пример подходит.



Критерии. Верный пример — 2 балла.
Доказано, что меньше 53 орехов не может быть — 4 балла.