3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

7 класс

1. Про две пары натуральных чисел известно, что отношение разности чисел к их сумме в первой паре равно такому же отношению во второй паре. Докажите, что произведение всех четырёх чисел является квадратом.

Решение. Пусть a и b — первая пара чисел, а c и d — вторая пара чисел. По условию

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d} \quad\Leftrightarrow\quad (a-b)(c+d)=(a+b)(c-d) \quad\Leftrightarrow\quad ad=bc.$$

Но тогда $abcd=(ad)^2$.

2. Волшебный навигатор для метлы Гарри Поттера показывает, сколько осталось лететь до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Гарри Поттер вылетел из дома в Косой переулок. В середине пути навигатор сообщил, что осталось лететь час. В этот момент Драко Малфой наложил на метлу проклятие, в результате чего её скорость уменьшилась и стала постоянной. После того, как Гарри пролетел половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось лететь 2 часа. Через сколько часов после этого он прибудет на место?

Ответ. Через 5 часов.

Решение. Когда навигатор сообщил Гарри Поттеру, что ему осталось лететь 2 часа, ехать ему оставалось пролететь четверть пути. Значит, 3/4 пути он пролетел за 6 часов. Но первую половину пути Гарра пролетел за час, значит, 5 часов он летел после наложения проклятия. Столько же времени уйдет у него и на оставшуюся четверть.

3. По кругу расставлены 50 фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает первый игрок (который начинает игру); в противном случае выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ. Второй игрок.

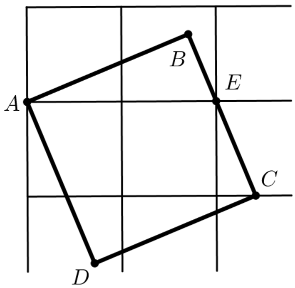
Решение. Разобьём 50 фишек на 25 пар стоящих рядом фишек. Заметим, что второй игрок может добиться того, чтобы после его хода все оставшиеся фишки также были разбиты на пары, то есть если осталась какая-то фишка, то парная с ней фишка тоже осталась. Действительно, возможно 2 случая:

- Если первый своим ходом взял 3 фишки из разных пар. Тогда второй своим ходом возьмёт парные им фишки.
- Если первый возьмёт две фишки из одной пары, а ещё одну из другой. Тогда второй возьмёт оставшуюся фишку из пары и ещё одну пару.

Поскольку второй будет ходить последним (так как ходов будет 16) и после последнего хода останется 2 фишки, то они будут образовывать пару, то есть стоять рядом.

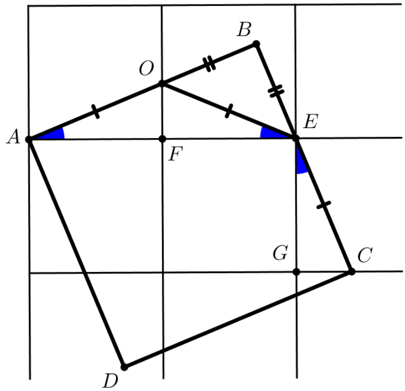
Критерии. Приведён верный алгоритм без обоснования — 1 балл.

4. На квадратную плитку уронили квадратный лист бумаги $ABCD$ так, что угол A листа попал в угол плитки, сторона BC прошла через угол плитки E, а угол C попал на край плитки. Найдите угол BAE.



Ответ. $22,5^\circ$.

Решение. Обозначим точку пересечения отрезка AB со стороной плитки за O, а также отметит углы плитки F и G. Заметим, что треугольники AOF и EOF равны ($AF = FE$, OF общая, углы AFO и EFO прямые). Далее $\angle OAF = \angle 90^\circ - \angle AEB = \angle CEG$, поэтому треугольники AOF и ECG равны ($AF = EG$, $\angle OAF = \angle CEG$, углы AFO и EGC прямые).



Тогда из равенства отрезков AO и CE следует равенство отрезков OB и BE, откуда $\angle OEB = 45°$. Тогда из равенства $\angle OAE = \angle OEA$ получаем, что $\angle OAE = 45°/2 = 22,5°$.

Критерии. Ответ дан в виде обратной тригонометрической функции, или без обоснования используется значение $\cos 22,5°$ — не более 3 баллов.

5. Для каждого натурального числа n обозначим через $S(n)$ сумму остатков при делении на все числа, меньшие n. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $S(n) = S(n+1)$.

Решение. Докажем, что числа вида $n = 2^k - 1$ удовлетворяет условию. Рассмотрим какое-нибудь число, меньшее $n+1$. Возможно 2 случая:

- Это число равно степени двойки, то есть имеет вид 2^l, где $l < k$. Тогда остаток от деления $2^k - 1$ на 2^l равен $2^l - 1$, поэтому его вклад в $S(n)$ был равен $2^l - 1$, а вклад в $S(n+1)$ равен 0. Суммарно вклад от степеней двоек уменьшится на

$$(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\ldots+(2^{k-1}-1) = (1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{k-1})-k =$$

$$= (2-1)\cdot(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{k-1}) - k = 2^k - k - 1.$$

- Это число не равно степени двойки. Тогда оно не делит $n+1$, поэтому его вклад в $S(n+1)$ на 1 больше, чем вклад в $S(n)$. Суммарно вклад от не степеней двойки увеличится на их количество, то есть на $(2^k-1)-k$.

Суммируя, получаем, что $S(n) = S(n+1)$.

Критерии. Утверждается, что $n = 2^k - 1$ подходит — 1 балл.