

XVII КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ



THE 17th KOLMOGOROV READINGS

ADVANCED EDUCATION AND SCIENCE CENTER

**Proceedings of
the 17th International Scientific Conference of students
Kolmogorov Readings
May 3-6, 2017**

MATHEMATICS

Moscow

2017

**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
(факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова**

**Материалы
XVII Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»
3-6 мая 2017**

МАТЕМАТИКА

**Москва
2017**

Председатель организационного комитета
XVII Международной научной конференции школьников

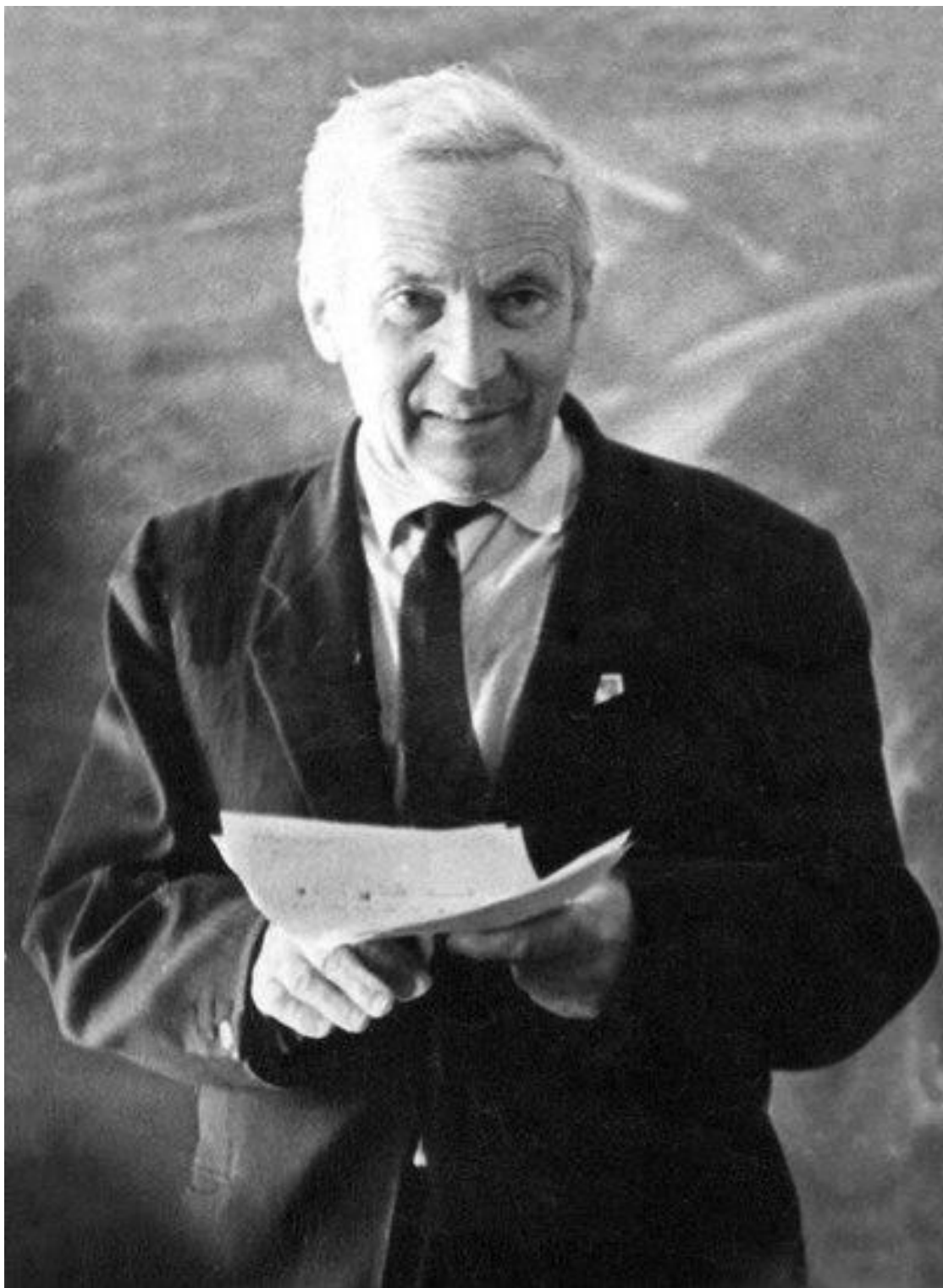
«Колмогоровские чтения»:
академик В.А. Садовничий

Редакционный совет сборника тезисов «Математика»:
И.Н. Сергеев (председатель), В.Н. Дубровский, Ю.В. Курышова

Материалы
XVII Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»

В настоящий сборник вошли тезисы приглашённых докладчиков
XVII Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения» по секции
«Математика»

© Специализированный учебно-научный центр (факультет) —
школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета имени
М.В. Ломоносова, 2017 г.



*Қақ в спорте не сразу ставят рекорды, тақ и подготовка қ настоящему науч-
ному творчеству требует тренировки.*

А.Н. Колмогоров

Оглавление

На работу на велосипеде? Шуляев М., Елфимов Н., Жарикова В., Шахиди А. ..	7
Примеры треугольников Шарыгина. Тихонова М.	10
Конфигурация Наполеона-Барлотти. Башаев Н.	11
Эксцентриситет вершины связного регулярного графа. Шинкарёв К.	12
Натуральные точки под кривой. Кожан Е.	14
Constructing a code via an equivalence relation on $\{0,1,2\}$. Khwanjira Phumphant, Paran Rouppadit, Woranuch Jitpakdeebodin, Pongpol Ruenkong	15
Принцип архимеда и принцип полноты в упорядоченных полях. Цегенько А.	16
Математическое моделирование стационарного состояния популяции амёб. Николаева Н.	18
Чевiani и равные площади. Булавина А.	19
Новые замечательные закономерности в теореме Наполеона. Акиндинов Г. ...	20
Обобщение теоремы Вариньона. Гомотетия на сторонах параллелограмма. Раков Е.	21
Пирамида Паскаля и решение олимпиадных задач. Стефаненко Е.	22
Обобщенные средние величины второго порядка. Храпуцкий Д.	23
Решение уравнений третьей и четвёртой степени с помощью замены неизвестной. Арутюнян К.	24
Сумма кубов цифр натурального числа. Шурыгин Д.	25
Применение графов при решении логических задач. Нырков Н.	26

НА РАБОТУ НА ВЕЛОСИПЕДЕ?

Шуляев Михаил, Елфимов Никита, Жарикова Василиса, Шахиди Анвар

*11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) —
школа-интернат имени А.Н. Колмогорова МГУ имени М.В. Ломоносова*

Научные руководители: доц. каф. мат. СУНЦ МГУ В.Н. Дубровский,
доц. каф. мат. СУНЦ МГУ И.И. Нараленкова

Основу работы составило решение задания, предложенного в российском туре соревнования по математическому моделированию 2016—17 г., в котором участвовали авторы. В задании требовалось определить долю жителей российских городов, которые смогут пересесть на велосипеды для передвижения до работы при наличии соответствующей инфраструктуры. Велосипед как способ перемещения по городу довольно актуален во многих городах Европы. На это есть несколько причин: экологичность, независимость от пробок, польза для здоровья. Но приживётся ли велосипед в России? Мы стремились ответить на этот вопрос.

Цель работы: определить потенциал развития велосипедного транспорта в городах России. Исходя из этой цели, мы поставили следующие **задачи**:

- Выявить функцию — «меру удобства», которая в зависимости от дальности определяет, какой транспорт наиболее приоритетен при поездке на данное расстояние.
- Построить математическую модель распределения населения городов по дальности их поездки от дома до работы для подстановки в «меру удобства».
- Количественно оценить долю горожан, для которых приемлемо пересесть на велосипед.
- Исходя из полученных результатов, выяснить, в каких городах создание велосипедной инфраструктуры наиболее оправдано.

Мы рассмотрели такие виды транспорта: личный автомобиль, общественный транспорт А (автобус, троллейбус, трамвай) и Б (метро), велосипед, мотоцикл и пеший способ передвижения. У каждого вида транспорта есть свои достоинства и недостатки.

Для сравнения этих непохожих видов транспорта мы определили те их свойства, которые играют наиболее существенную роль в выборе людей. В первую очередь, это время поездки. Оно состоит из собственно времени в пути и времени на обслуживание и вычисляется по формуле: $t(L) = L/v + \lambda$, где L — расстояние до работы, v — скорость транспорта, а λ — время на обслуживание. Мы приняли среднюю скорость велосипеда за 16 км/ч, мотоцикла — 50 км/ч,

транспорта Б — 40 км/ч, пешехода — 5 км/ч. Со средними скоростями автомобиля и транспорта А не всё так просто, т.к. они зависят от уровня пробок в городе. С помощью исследования Яндекса [1] на похожую тему мы смогли определить зависимость скорости от дальности поездки: если человек едет на небольшую дистанцию, то с большой вероятностью он проезжает её в пробках, часто останавливается на поворотах и светофорах и т. д. При дальних поездках значительная часть пути проходит по окраинам, где пробки отсутствуют. Пробки возникают по той причине, что слишком большое число людей и транспорта скапливается на одном участке дороги. Поэтому мы исходили из того, что степень пробок в городе определяется плотностью населения.

В качестве других критериев выбора транспорта, мы рассматривали коэффициент аварийности, который считается с использованием статистики аварийности разных видов транспорта. Кроме того, мы учитывали климатический фактор: поскольку велосипед и мотоцикл мало пригодны для массового использования зимой, для них мы конечный результат в виде доли граждан умножаем на температурный коэффициент, равный количеству дней в году с положительной температурой в этом городе.

Распределение по дальностям для каждого города вычисляется следующим образом:

- Для каждого города определяем коэффициент протяжённости как отношение большей стороны описанного прямоугольника города, за которую берется его диаметр, к меньшей.
- Среднее расстояние вычисляется как $\langle L_2 \rangle = K_2 \cdot \sqrt{\frac{S_2}{S_M}} \cdot \frac{\langle L_M \rangle}{K_M}$, где K_2 — коэффициент протяжённости города, S_2 — площадь города, S_M и K_M — аналогичные показатели для Москвы. K_M известно нам из исследований Яндекса.
- Далее мы подбираем такую функцию, которая отражала бы «плотность» населения в зависимости от расстояния от дома на работу. В этом нам тоже могут помочь те же исследования Яндекса, в которых по каждому из районов указано среднее время поездки. Районов достаточно много, чтобы построить этот график.
- Доля горожан, преодолевающих при поездке на работу расстояние из заданного промежутка, находится как интеграл от плотности по этому промежутку.

Для каждого из рассматриваемых видов транспорта определим *меру удобства* как $C(L) = \frac{S \cdot T}{t(L)}$, где S — коэффициент безопасности, T — температурный коэффициент, $t(L)$ — время поездки.

Мы рассматривали города с населением > 500000 человек, т. к. города с меньшим населением меньше и по размеру и наши приближения уже работают. Таких городов в России 36.

Наша мера удобства отражает совокупность основных критериев, которые показывают насколько транспорт удобен. Соответственно, чем больше мера удобства у данного вида транспорта, тем больше вероятность выбора его людьми. Поэтому для подсчёта итогового ответа:

- вводим относительную меру удобства как $C_{отн}(L) = \frac{C(L)}{\text{Sum}(L)}$, где $\text{Sum}(L)$ — сумма мер удобства для всех видов транспорта для данного L .
- Используя полученная ранее функцию плотности распределения людей по дальности $\rho(L)$, считаем общую долю велосипедистов. Т. к. для заданного L она равна $C_{отн}(L)$, то общая доля велосипедистов вычисляется по формуле

$$Ans = \int_0^{L_{\max}} \rho(L) C_{отн, вело}(L) dL,$$

где $L_{\max}$ — максимальная возможная удалённость работы от дома.

Результаты исследования свидетельствуют о том, что в среднем порядка 7,4% населения гипотетически могут пересесть на велосипеды. Больше всего этот процент населения в южных городах: Махачкала, Краснодар, Ростов-на-Дону, Астрахань. Это неудивительно, т. к. мы учитывали температурный коэффициент. Для городов, где ситуация с пробками критическая, введение велосипедной инфраструктуры может ощутимо снизить нагрузку на дороги, т.к. бóльшая часть тех, кто перейдёт на велосипед — автомобилисты.

Список использованных источников:

1. «Дом — работа, работа — дом.»: https://yandex.ru/company/researches/2016/home_work

ПРИМЕРЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ШАРЫГИНА

Тихонова Мария

10 класс, МБОУ «Физико-математический лицей», г. Сергиев Посад

Научный руководитель: д. ф.-м. н. Забавин Валерий Николаевич

Известно, что если основания медиан (высот) данного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника, то и данный треугольник — равнобедренный. И.Ф. Шарыгин [1] доказал, что существуют неравнобедренные треугольники, для которых треугольник с вершинами в основаниях биссектрис (биссектральный треугольник) равнобедренный (такие треугольники мы будем называть *треугольниками Шарыгина*). В статье [2] он говорит, что «не сумел построить конкретный пример треугольника (т.е. точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством», и выразил надежду, что это удастся читателям. На основе этих замечаний сформулирована **цель работы**: построить примеры треугольников Шарыгина с замечательными углами и с рациональными сторонами.

Условие равнобедренности биссектрального треугольника приведено в [3]; в [4] найден способ решения уравнения, возникшего в процессе работы, в рациональных числах.

Вывод. Построены примеры неравнобедренных треугольников, для которых биссектральный треугольник равнобедренный:

- 1) треугольник с углами: $\pi/7$, $2\pi/7$, $4\pi/7$;
- 2) треугольник с рациональными сторонами.

Список использованных источников:

1. И.Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии. Планиметрия. Библиотечка «Квант». Вып.17.-М.:Наука,1982 .
2. И.Ф. Шарыгин. Вокруг биссектрисы//Квант.-1983.-№8.
3. И.А. Кушнир. Геометрия. Поиск и вдохновение. - М.:МЦНМО,2013.
4. В.В. Острик, М.А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. Библиотека «Математическое просвещение». Вып.8-М.: МЦНМО, 2005.

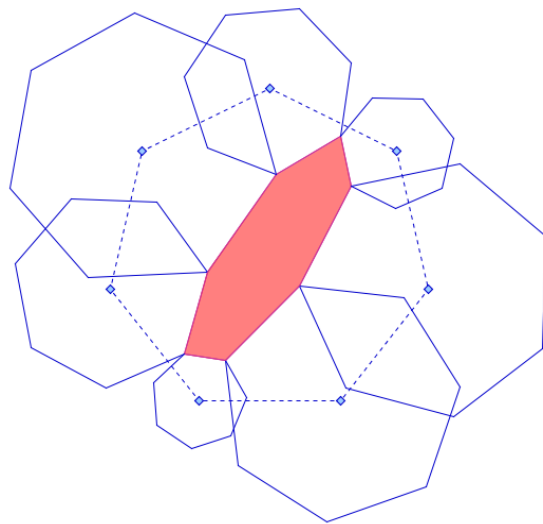
КОНФИГУРАЦИЯ НАПОЛЕОНА-БАРЛОТТИ

Башаев Никита

11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Научный руководитель: доц. каф. мат. СУНЦ МГУ В.Н. Дубровский

Известная теорема Наполеона утверждает, что если построить на сторонах произвольного треугольника правильные треугольники, то их центры обязательно сами будут образовывать правильный треугольник. В 1955 г. Адриано Барлотти опубликовал [1] обобщение этой теоремы. Возьмём некоторый n -угольник и построим на его сторонах правильные n -угольники, которые мы в дальнейшем будем называть *ушами*. Тогда их центры будут образовывать правильный n -угольник в том и только том случае, если исходный многоугольник является аффинно-правильным, т. е. образом правильного многоугольника при аффинном преобразовании. Такое обобщение носит название теоремы Наполеона-Барлотти.



В первой части работы даётся новое простое доказательство теоремы Наполеона-Барлотти с помощью геометрических методов и того факта, что любое преобразование комплексной плоскости вида $z \rightarrow Az + Bz^* + C$ является аффинным.

Вторая часть работы посвящена задаче о ломаных. Рассмотрим рисунок к теореме Наполеона-Барлотти. Отметим точку на одном из ушей. Теперь представим, что это ухо вместе с точкой перекатывается вокруг исходного многоугольника и в то же время меняется в размерах, чтобы превратиться в точно в следующее ухо. Иначе говоря, происходит поворотная гомотетия вокруг общей точки этих двух ушей. Соединим начальное и конечное положение отмеченной точки и продолжим процесс, пока не получится замкнутая ломаная. Очевидно, что ломаная целиком определяется своей начальной точкой, однако при некоторых различных положениях начальной точки получаются одинаковые (совмещающиеся движениями) ломаные. Оказывается, это верно тогда и

только тогда, когда две начальные точки переходят друг в друга при одном из самосовмещений первого уха.

Это новая теорема. Она является обобщением результатов А.Смирнова для треугольников и четырехугольников, представленных на «Колмогоровских чтениях» 2016 [2]. При этом в нашей работе концептуально другое доказательство, которое использует аналогию между дискретным и непрерывным вариантами задачи. Под непрерывным вариантом понимается следующее: возьмём два одинаковых диска, отметим на одном из них точку и будем его катить без проскальзывания вокруг другого. Отмеченная точка будет рисовать некоторую траекторию. Очевидно, что траектории двух точек совмещаются движением тогда и только тогда, когда их начальные точки равноудалены от центра катящегося диска.

Автор благодарит своего научного руководителя В.Н. Дубровского за постановку задачи и ценные советы.

Список использованных источников:

1. A. Barlotti. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 1955, (3) 10, 96-98.
2. А. Смирнов. Обобщения и аналоги теоремы Наполеона (устное сообщение).

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ВЕРШИНЫ СВЯЗНОГО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА

Шинкарёв Константин

10 класс, ГУО «Средняя школа №30 г. Гомеля»

Научный руководитель: Довженок Татьяна Степановна,
учитель ГУО «СШ №30 г. Гомеля», к.ф.-м.н.

В работе рассматривается семейство $G(n;k)$ всех связных регулярных графов на n вершинах степени k ($n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n - 1$). Объект исследования — эксцентриситет вершины таких графов. *Эксцентриситетом вершины графа* называется максимальное из всех расстояний от данной точки до остальных вершин графа.

Цель работы — найти все возможные значения эксцентриситетов вершин графов из $G(n;k)$.

Частный случай этой проблемы ($n = 100$, $k = 3$) предлагался для исследования в задаче «Сплетни» на Гомельском областном турнире юных математиков (2016г).

Результаты для $k \geq 3$ представлены в теоремах 1 — 4.

Теорема 1. В случае нечётного $k \geq 3$, эксцентриситет любой вершины графа из $G(n;k)$ не превосходит $E_{\max}$, где

а) $E_{\max} = 1$, если $m = 1, r = 0$;

б) $E_{\max} = 3m - 3$, если $m > 1, r = 0$;

в) $E_{\max} = 3m - 1$, если $r > 0$,

где m, r — неполное частное и остаток от деления n на $(k + 1)$.

Теорема 2. В случае чётного $k \geq 4$, эксцентриситет любой вершины графа из $G(n;k)$ не превосходит $E_{\max}$, где

а) $E_{\max} = 1$, если $m = 1, r = 0$;

б) $E_{\max} = 3m - 3$, если $m > 1, r = 0$;

в) $E_{\max} = 3m - 2$, если $m > 1, r = 1$ или $m > 1, r = 2$;

г) $E_{\max} = 3m - 1$, если $m > 1, r \geq 3$ или $m = 1, r \neq 0$,

где m, r — неполное частное и остаток от деления n на $(k + 1)$.

Теорема 3. В случае $k \geq 3$ эксцентриситет любой вершины графа из $G(n;k)$ не меньше, чем $E_{\min} = t + 1$, где t находится из условия

$$\frac{k(k-1)^t-2}{k-2} < n \leq \frac{k(k-1)^{t+1}-2}{k-2}.$$

Теорема 4. Если $k \geq 3$, то для любого натурального числа m из отрезка

$[E_{\min}; E_{\max}]$ существует граф из $G(n;k)$, эксцентриситет одной из вершин которого равен m .

Важную часть исследования занимает построение примеров самых «длинных» и самых «коротких» графов из $G(n;k)$ с пограничным значением эксцентриситета вершины $E_{\max}$ и $E_{\min}$, соответственно. Для их описания используется собственная система обозначений.

Вывод: для $k \geq 3$ доказано, что множество значений эксцентриситетов вершин всех графов из $G(n;k)$ совпадает с множеством натуральных чисел отрезка $[E_{\min}; E_{\max}]$.

Все результаты получены автором самостоятельно.

НАТУРАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ПОД КРИВОЙ

Кожан Елизавета

10 класс, ГУО Гимназия №1, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель: к. ф.-м. н. М. И. Наумик, ВГУ им. П.М. Машерова

Задача предложена на республиканском турнире юных математиков в декабре 2016 г.

Основные результаты.

I. Рассмотрим координатную плоскость Oxy . Ее точку (x, y) будем называть *натуральной*, если $x, y \in \mathbb{N}$. Далее на этой плоскости рассмотрим прямую $y = \alpha x$, где α — положительное действительное число. Рассмотрим также натуральное число n . Множество натуральных точек в области (включая её границу), ограниченной осью Ox , прямой $y = \alpha x$ и прямой $x = n$ будем называть *множеством натуральных точек под прямой $y = \alpha x$* . Количество элементов в этом множестве будем обозначать $f_\alpha(n)$.

I.1. Найдены $f_{\sqrt{2}}(6)$ и $f_{\sqrt{3}}(4)$, $f_1(n)$.

I.2. Опровергнуто существование таких различных α и β , что при любом натуральном n выполняется равенство $f_\alpha(n) = f_\beta(n)$.

I.3. Найдены $f_\alpha(n)$ для а) целого α ; б) такого α , что 2α — целое; в) такого α , что 3α — целое; г) $\alpha = \frac{a}{b}$, где $\text{НОД}(a, b) = 1$ и $n = bk, k \in \mathbb{N}$. д) Полученные результаты обобщены и получена формула для $\alpha = \frac{a}{b}$, где $\text{НОД}(a, b) = 1$ и произвольного n .

I.4. Доказано, что при фиксированном α последовательность $\frac{f_\alpha(n)}{n^2}$ сходится, и вычислен её предел.

I.5. Доказано, что а) $f_\alpha(n) = \frac{1}{2}[\alpha]n(n+1) + f_{\{\alpha\}}(n)$, где $[\alpha]$ — целая часть α , а $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α ; б) $f_\alpha(n) + f_{1/\alpha}([n\alpha]) - \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil = n[n\alpha]$, где $\alpha = \frac{a}{b}$, $\text{НОД}(a, b) = 1$. Построен аналог этой формулы для произвольного положительного $\alpha \in \mathbb{R}$. в) Найден алгоритм вычисления $f_\alpha(n)$.

I.6. а) Проверено выполнение равенства $f_{\alpha+\beta}(n) = f_\alpha(n) + f_\beta(n)$ для целых α и β . Найдено множество пар (α, β) , для которых это равенство выполняется для любого натурального n . Найдена связь между $f_{\alpha+\beta}(n)$ и $f_\alpha(n)$, $f_\beta(n)$.

б) Найдена связь между $f_\alpha(n+m)$ и $f_\alpha(n)$, $f_\alpha(m)$.

II. Аналогично введём понятие *множества натуральных точек под параболой* $y = \alpha x^2$, где α — положительное действительное число. Число элементов в этом множестве обозначим $g_\alpha(n)$. Также введём понятие *множества натуральных точек под параболой* $y = \alpha\sqrt{x}$. Число элементов в этом множестве обозначим $h_\alpha(n)$.

II.1. Получены ответы на вопросы пунктов 1, 2, 3 для $g_\alpha(n)$ и $h_\alpha(n)$. В частности, показано, что

$$h_1(n) = n \left[\sqrt{n} \right] - \frac{1}{3} \left[\sqrt{n} \right]^3 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{n} \right]^2 + \frac{5}{6} \left[\sqrt{n} \right].$$

II.2. Доказано, что $g_\alpha(n) = \frac{[\alpha]n(n+1)(2n+1)}{6} + g_{\{\alpha\}}(n)$.

II.3. Получены ответы на вопросы пунктов I.5.в, I.6 для функций $g_\alpha(n)$ и $h_\alpha(n)$.

Дальнейшие исследования. Рассмотреть обобщение данной задачи на плоскости для кривых $y = \alpha x^{1/3}$, $y = \alpha x^3$, $y = \alpha x^{1/m}$, $y = \alpha x^m$, $y = \alpha^x$, $y = \log_\alpha x$, $y = \alpha \sin x$, $y = \alpha \arcsin x$.

Список использованных источников:

1. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. Под ред. А.А. Заславского, Д.А. Пермякова, А.Б. Скопенкова, М.Б. Скопенкова и А.В. Шاپовалова. // МЦНМО, 2009.
2. Рональд Л. Грэхем, Дональд Эрвин Кнут, Орен Паташник. Конкретная математика Математические основы информатики // 2 издание. Издательский дом «Вильямс», 2013.

CONSTRUCTING A CODE VIA AN EQUIVALENCE RELATION ON $\{0,1,2\}$

Khwanjira Phumphid, Paran Rouppadit,

Woranuch Jitpakdeebodin, Pongpol Ruenkong

Mahidol Wittayanusorn School, Nakhon Pathom, Thailand

Scientific advisors: Thammanoon Puirod, Department of Mathematics,
MWITS, and Aunyarat Bunyawat Department of Mathematics,
Faculty of Science, Kasetsart University, Bangkok

Nowadays, communication is an important thing for human and the most popular way of communication is internet. There may be some noises during the transmission process of data on the internet accordingly users should make sure that data is secured during sending messages. Authors decided to develop this project for the purpose that users could send messages efficiently. The project's scope is creating an equivalence relation on $\{0,1,2\}^*$, the set of words of finite length over the alphabets 0,1 and 2. Authors create 2 sets of words called class E and class I, and define attributes of each class which relates one another. Then, authors prove that class E and class I is a partition of the set of words of finite length over the alphabets 0,1 and 2. The relationship between class E and class I is used to encode and decode the messages we want to send. Moreover, we derive some interesting properties about class E and class I in hope that it helps improve the codes that we construct. In conclusion, we construct an algorithm to encode messages, which has practical uses.

ПРИНЦИП АРХИМЕДА И ПРИНЦИП ПОЛНОТЫ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛЯХ

Цегенько Александр

*11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) —
школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва*

Научный руководитель: Сыркин Геннадий Иосифович, ст.п. каф. мат. СУНЦ МГУ

Возможны различные подходы к определению системы действительных чисел, например:

- 1) как бесконечных десятичных дробей;
- 2) как пополнение рациональных чисел с помощью сечений Дедекинда в множестве рациональных чисел;
- 3) аксиоматический (или дескриптивный) — как модели множества аксиом линейно упорядоченного поля с добавленной аксиомой полноты (или аксиомой непрерывности).

В докладе мы сосредоточим внимание на аксиоматическом подходе. Аксиомы упорядоченного поля вместе с принципом полноты характеризуют систему действительных чисел однозначно с точностью до изоморфизма упорядоченных полей.

Натуральный ряд определяется как наименьшее (в смысле включения) подмножество множества всех действительных чисел, которое, во-первых, замкнуто относительно операции прибавления единицы и, во-вторых, содержит

число 0. Это определение натурального ряда позволяет вести индукцию по его элементам (то есть по натуральным числам). В одной из равносильных между собой формулировок принцип Архимеда утверждает, что натуральный ряд не ограничен сверху во множестве всех действительных чисел.

Одна из целей исследования — дать по возможности простой вывод принципа Архимеда из аксиом упорядоченного поля и принципа полноты (принципа непрерывности).

На первый взгляд кажется, что принцип Архимеда, ввиду его интуитивной ясности, может быть выведен из аксиом упорядоченного поля, но математики давно осознали, что это не так — были обнаружены упорядоченные поля, для которых этот принцип не выполняется. Математические структуры, для которых принцип Архимеда выполняется, стали называть архимедовыми (архимедово поле, архимедова группа), а те структуры, для которых он не выполняется — неархимедовыми. Поле действительных чисел может быть определено как максимальное (по включению) архимедово упорядоченное поле.

В докладе приводятся четыре формулировки принципа Архимеда, каждая из которых представляет самостоятельный интерес, и доказываются их равносильность; приводятся несколько равносильных формулировок принципа полноты (принципа непрерывности); приводится пример упорядоченного поля, в котором не выполняется принцип Архимеда, и, следовательно, существуют бесконечно малые и бесконечно большие элементы.

Список использованных источников:

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979. Гл. 11, стр. 273-305.
2. Ленг С. Алгебра. -М.: Мир, 1968. Гл. 11, Параграфы 1, 2, стр. 307-312.
3. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. 6-е изд. МЦНМО, 2012. Глава 2, стр. 79-80.
5. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. Изд. 3-е, стереотипное. — М.:КомКнига, 2006. 240 с. (Классический университетский учебник).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ПОПУЛЯЦИИ АМЕБ

Николаева Надежда

10 класс, МАОУ «Лицей №37 г. Челябинска», г. Челябинск

Научный руководитель: Клебанов Игорь Иосифович, ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ», доц.каф. мат. и методики обучения математики, к.ф-м.н.

Целью настоящей работы является изучение математической модели динамики популяции амёб, построенной А.А. Самарским и А.П. Михайловым.

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} N_t = a\Delta N - b\operatorname{div}(N\operatorname{grad}\rho) \\ \rho_t = c\Delta\rho + eN - f\rho \end{cases} \quad (1)$$

где N — число амёб в единице объема, ρ — плотность притягивающего вещества, Δ — лапласиан, a, b, c, e, f — константы.

Методами группового анализа нами установлено, что система уравнений (1) допускает следующие симметрии (не меняет вида при данных преобразованиях): параллельных переносах вдоль осей координат, поворотах относительно осей координат, параллельном переносе по временной шкале и преобразования вида $\rho \rightarrow \rho + e^{-ft}$. Инвариантность системы (1) относительно поворотов и трансляции по шкале времени свидетельствует о наличии стационарного сферически симметричного решения, которое является основным предметом нашего изучения. Численное решение системы (1) в случае $N_t = \rho_t = 0$ и сферической симметрии приводит к выводу, что, в зависимости от значений концентрации притягивающего вещества и плотности амёб (а также градиентов этих величин) в центре сферического распределения, возможны три типа стационарного распределения амёб:

- равномерное распределение
- быстрое монотонное убывание с увеличением расстояния от центра (концентрация в конечном объеме)
- затухающие пространственные колебания с выходом на насыщение.

Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области математического моделирования и биофизики.

Список использованных источников:

1. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры./А.А. Самарский, А.П. Михайлов. - М., Физматлит, 2001. - 320 с.

2. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / Перевод с англ. И. С. Емельяновой. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. 421с.

ЧЕВИАНЫ И РАВНЫЕ ПЛОЩАДИ

Булавина Алина

11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва

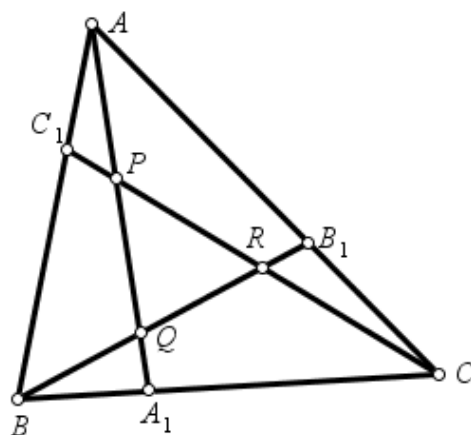
Научные руководители: профессор кафедры математики СУНЦ МГУ В.В.Вавилов; доцент кафедры математики СУНЦ МГУ, В.Н. Дубровский

Известно, что три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников. Очевидно, верно и обратное: если какие-то три чевианы треугольника, пересекаясь в одной точке, разбивают его на шесть треугольников одинаковой площади, то эти чевианы являются медианами. В работе доказано, что в последнем утверждении достаточно потребовать равенства любых трёх из шести площадей; приведены другие утверждения об условиях на три чевианы, при которых площади некоторых частей треугольника, на которые он разбивается этими чевианами, равны. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим три чевианы треугольника, проходящие через одну точку. Если какие-то три из шести частей, на которые эти чевианы разбивают треугольник, равновелики, то проведённые чевианы являются медианами треугольника.*

Теорема 2. *На сторонах треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что $AC_1:C_1B=p$, $BA_1:A_1C=q$, $CB_1:B_1A=r$. Если площади треугольников APC_1 , BQA_1 и CRB_1 (см. рисунок) равны, то $p=q=r$.*

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 1 сумма площадей трёх частей разбиения, взятых через одну, равна сумме площадей трёх других частей, то одна из чевиан — медиана.*



Попутно были вычислены площади семи частей, на которые три произвольные чевианы делят треугольник. В качестве аппарата использовались теоремы об отношениях, в которых чевианы делят друг друга и стороны треугольника и о связи отношений отрезков и отношений площадей.

Автор благодарна В. В. Вавилову и В. Н. Дубровскому за постановку новых задач и помощь в работе.

Список использованных источников:

1. В.В. Вавилов, Геометрические мелодии. — М.: ООО «Азбука», 2013. - 138с.// Библиотека «Потенциал». Вып. 3.

НОВЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ТЕОРЕМЕ НАПОЛЕОНА

Акиндинов Георгий

10 класс, МБОУ «Физико-математический лицей», Сергиев Посад

Научный руководитель: Гавриленко Галина Юрьевна, учитель математики

Цель работы: сформулировать и доказать новые закономерности в теореме Наполеона.

В процессе исследования найдены и доказаны интересные закономерности для медиан внешних треугольников, проведенных из вершин данного многоугольника. В своей работе я буду называть внешними треугольниками те, которые образованы двумя соседними вершинами правильных многоугольников и вершиной исходного многоугольника. При доказательстве использовал теорему косинусов, формулу медианы треугольника, поворот, формулу площади треугольника.

1. Если на сторонах произвольного треугольника построить правильные треугольники (внешним или внутренним способом), то медианы внешних треугольников, проведенные из вершин исходного треугольника, будут равны между собой.

2. Если на сторонах произвольного треугольника построить правильные шестиугольники (внешним или внутренним способом), то основание медианы внешнего треугольника, вершина исходного треугольника и центр противоположного правильного шестиугольника лежат на одной прямой. Отрезки, соединяющие основание медианы внешнего треугольника и центр противоположного шестиугольника будут равны.

3. Если на сторонах произвольного треугольника построить квадраты, то медиана внешнего треугольника, проведенная из вершины исходного треугольника равна половине противоположной стороны исходного треугольника. Эта медиана также является продолжением высоты, проведенной из той же вершины исходного треугольника.

4. Если на сторонах произвольного параллелограмма построить квадраты, то медиана внешнего треугольника будет равна половине основания другого внешнего треугольника.

5. Если на сторонах произвольного параллелограмма построить правильные восьмиугольники, то медианы внешних треугольников будут равны. Также, основания медиан образуют параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке пересечения диагоналей исходного параллелограмма.

Список использованных источников:

1. Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.В. и др. М: Физматлит, 2005.
2. <https://ru.wikipedia.org/>
3. Смирнов А.С. «Обобщения и аналоги теоремы Наполеона»

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВАРИНЬОНА. ГОМОТЕТИЯ НА СТОРОНАХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Раков Евгений

*11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) —
школа-интернат имени А.Н. Колмогорова Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова, Москва*

Научные руководители: доц. каф. мат. СУНЦ МГУ Е.В. Шивринская;
асс. каф. мат. СУНЦ МГУ К.Г. Евдокимов

Была поставлена задача: «На сторонах четырехугольника отмечены точки так, что они отсекают с концов сторон равные части. Соседние точки на смежных сторонах соединяются прямыми, прямые продолжаютя до пересечения. Исследовать полученную фигуру и восстановить на плоскости по этой фигуре исходный четырехугольник». Основная идея — получить обобщение теоремы Вариньона. Сама теорема гласит, что если соединить середины сторон любого четырехугольника, то получится параллелограмм. Обобщение же будет справедливо не только для случая с четырехугольником и серединами его сторон, но и для случая с абсолютно любым четырехугольником и такими парами то-

чек, что отсекают от разных концов его сторон равные части этих самых сторон.

В теории использовались базовые теоремы и понятия из планиметрии. В процессе работы потребовалось выполнить построение, которое для наглядности было выполнено в программной среде «Математический конструктор» (построения в данной программе не являются основами для доказательства, а только лишь наглядным примером выполнения задачи).

В результате мы пришли к выводу, что если в четырехугольнике последовательно соединить точки, делящие стороны в заданном отношении, то получится параллелограмм. Была получена формула для определения площади усовершенствованного параллелограмма Вариньона, найден новый способ однозначного задания четырехугольника и его построение с помощью гомотетии. А также была достигнута поставленная цель: обобщение теоремы Вариньона.

Список использованных источников:

1. Вавилов В.В. Математические успехи школьников. – М.: СУНЦ МГУ, 2016.
2. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991.
3. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. – М.: МЦНМО, 2008.
4. Понарин Я.П. Аффинная и проективная геометрия. – М.: МЦНМО, 2009.

ПИРАМИДА ПАСКАЛЯ И РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Стефаненко Елизавета

11 класс, МАОУ средняя общеобразовательная школа №17 с углубленным изучением отдельных предметов Щелковского муниципального района

Научный руководитель: Батхина Наталья Владимировна,
МАОУ СОШ №17 с УИОП ЩМР, учитель математики, к.ф.-м.н.

Решая одну из задач олимпиады «Ломоносов 2016-2017» по математике, я пришла к необходимости узнать, как вычисляются триномиальные коэффициенты и какими свойствами они обладают.

В данной работе http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/0005_101.pdf я нашла перечисление свойств триномиальных коэффициентов и правила построения пирамиды Паскаля, которые я использовала для решения задачи. Все свойства я доказала самостоятельно.

Оказалось, что эти свойства можно использовать для решения вероятностных задач из ЕГЭ такого содержания: «Игральную кость бросаю трижды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна n », не перебирая все благоприятные варианты. Такому способу решения подобных задач, использующему треугольные числа в Пирамиде Паскаля, я научила одноклассников.

Т.к. в ЕГЭ встречаются задачи с бросанием кости 4 раза, то я решила обобщить все перечисленные результаты на случай коэффициентов n -ой степени многочлена из 4-х слагаемых. Что и было сделано. Для четырехмерной пирамиды Паскаля удалось построить её трёхмерные сечения и сформулировать правила их заполнения.

Список использованных источников:

1. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1979. 48 с.
2. Бондаренко Б.А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. Ташкент: Фан, 1990. 192 с.

ОБОБЩЕННЫЕ СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Храпуцкий Данила

9-й класс, ГУО «Гимназия г. Добруша»

Научные руководители: Лемешев Валерий Петрович, ст. преп. кафедры алгебры и геометрии УО «ГГУ им. Ф.Скорины»; Парукова Ядвига Владимировна, учитель математики ГУО «Гимназия г. Добруша»

Настоящая работа посвящена исследованию свойств средних величин второго порядка для положительных чисел (среднего арифметического — A_2 , гармонического — H_2 , геометрического, — G_2 и квадратического — Q_2) выходящих за пределы классических представлений. Использовались методы комбинаторики и соотношений арифметической и геометрической прогрессий. На основании леммы 1 вводятся понятия обобщенного среднего гармонического $H_2^{(n,k)}$ и обобщенного среднего геометрического $G_2^{(n,k)}$ рангов (n, k) для натуральных чисел n, k . Доказаны формулы для их вычисления.

Лемма 1. Для любых значений a_1, a_2 справедливы соотношения

$$\frac{G_2}{H_2} = \frac{A_2}{G_2}, \quad Q_2^2 + G_2^2 = 2A_2^2.$$

Теорема 1. Для любого натурального числа n и натурального числа $k \geq 2$

$$H_2^{(n,k)} = G_2 \cdot \sum_{i=-1}^{n-2} C_{n+k-2-i}^{k-2} \cdot \left(\frac{A_2}{G_2}\right)^i.$$

Теорема 2. Для любого натурального числа k и натурального числа $n \geq 2$

$$G_2^{(n,k)} = \sqrt{C_{n+k-2}^k \cdot \left(\frac{k-n+1}{n-1} \cdot G_2^2 + A_2^2\right)}.$$

Список использованных источников:

1. А.Н. Колмогоров. Математика и механика. – М. – 1985. С.136-138.
2. Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Неравенства для средних. Математика. Издательский дом «Первое Сентября», 2006, № 10, стр. 25-36.
3. А.Д. Блинков. Классические средние в арифметике и геометрии.-М.: МЦМНО, 2012.-168с.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЁРТОЙ СТЕПЕНИ С ПОМОЩЬЮ ЗАМЕНЫ НЕИЗВЕСТНОЙ

Арутюнян Карен

9 класс, МБОУ «Физико-математический лицей», Сергиев Посад

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Забавин Валерий Николаевич

В школьном курсе алгебры квадратное уравнение решается выделением полного квадрата. Это и есть замена неизвестной. Действительно, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ приводится к виду $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$, заменив неизвестную x по формуле $x = y - \frac{b}{2a}$, придём к уравнению $ay^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$.

Цель работы — найти замену неизвестной, максимально упрощающую уравнения третьей и четвёртой степени, и решить их.

Кубическое уравнение общего вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ заменой неизвестной $x = y - \frac{b}{3a}$ приводится к виду $y^3 + py + q = 0$. Уравнение четвёртой степени аналогично приводится к виду $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.

Уравнение $y^3 + py + q = 0$ с помощью замены $z = y^2 + 2Ay + B$ и выбора коэффициентов A и B приводится к двучленному уравнению для z . Зная z , из квадратного уравнения $y^2 + 2Ay + B - z = 0$ можно найти y .

Аналогично уравнение четвёртой степени приводится к биквадратному уравнению.

Вывод: найдены замены неизвестной, максимально упрощающие уравнения третьей и четвёртой степени и позволяющие их решить. Этот способ отличается от известных способов.

Список использованных источников:

1. Табачников С.Л., Фукс Д.Б. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011.
2. Энциклопедия элементарной математики. Алгебра. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
3. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965.

СУММА КУБОВ ЦИФР НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Шурыгин Данил

6 класс, МБОУ СОШ №6, г. Пятигорск

Научный руководитель: Стрельцова Елена Юрьевна, зав. лабораторией непрерывного математического образования Института экономики и управления, г. Пятигорск

Постановка задачи сформулирована в книге [1]. С десятичной записью натурального числа проделывают следующую операцию: находят сумму кубов его цифр, для полученного числа снова находят сумму кубов его цифр и т.д. Какие последовательности чисел могут получаться?

Исследование этой задачи происходило в несколько этапов.

1. Получены последовательности для однозначных чисел.

Выводы:

- Каждая такая последовательность приводит к результату, который потом уже не меняется. Это числа 1, 153, 370, 371 и цикл 133-55-250.
- Существуют трёхзначные числа, равные сумме кубов своих цифр.

Возникли вопросы:

Всегда ли такие последовательности приводят к неменяющемуся результату или могут разрастаться бесконечно? Есть ли ещё числа равные сумме кубов своих цифр?

2. С помощью программы Microsoft Excel получены последовательности для двузначных чисел. Обнаружены ещё один цикл 217-352-160 и ещё одно трёхзначное число 407, которое не меняется при нашем процессе.

3. Я заметил, что сумма кубов цифр самого большого четырёхзначного числа 9999 равна четырёхзначному числу 2916. Поэтому достаточно построить последовательность для всех чисел от 1 до 10000, чтобы можно было сделать общие выводы. Для этого я написал программу на языке C++, которая выявила все возможные «траектории» описанного процесса.

Список использованных источников:

1. Сгибнев А.Н. Исследовательские задачи для начинающих. – М.: МЦНМО, 2013.

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ныркв Никита

10 класс, ОЗШ «ДОНМАН», МОУ «Школа № 4 г. Донецка»

Научные руководители: Дудинская Ирина Николаевна, МОУ «Школа № 4 г. Донецка», учитель математики высшей категории, старший учитель;
Ищенко Ирина Анатольевна, МОУ «Школа № 4 г. Донецка», учитель математики высшей категории, учитель-методист

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что графы, благодаря наглядности, позволяют представить соотношение между событиями и объектами событий, а это упрощает решение многих логических задач. Через теорию графов происходит проникновение в науку и технику математических методов.

Цель работы: рассмотреть возможность применения графов при решении логических задач и составить алгоритм их решения.

Объект исследования: логические задачи.

Предмет исследования: графы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи, используя теоретические и практические методы, а именно:

- познакомиться с историей возникновения теории графов;
- углубленно изучить литературу по теории графов;
- раскрыть возможности графов как средство решения логических задач;

- овладеть приемами перевода логических задач на язык графов;
- составить алгоритма решения логических задач.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования результатов исследования в межпредметных дисциплинах и повседневной жизни, в виде презентаций учителями-предметниками в качестве вспомогательного материала при проведении интегрированных уроков по различным учебным дисциплинам и на внеклассных занятиях по математике.

Список использованных источников:

1. Абрахамс Дж. Каверли Дж. Анализ электрических цепей методом графов. М. Изд. «Мир» - 1967 г. – 175 с.
2. Бассакер Р. Саати Т. Конечные графы и сети. М. Изд. «Наука», 1974 - 388 с.
3. Березина Л. Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей с ил. — М.: Просвещение, 1979. — 143 с.
4. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический и подход М. Изд. «Мир» 1978 -432 с.

Отпечатано 19 апреля 2017 года.
Издательский центр СУНЦ МГУ,
г. Москва, ул. Кременчугская, д.11, 107-Б.