

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

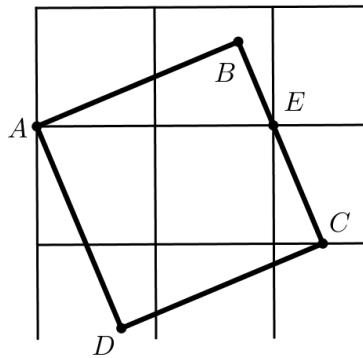
7 класс

1. Про две пары натуральных чисел известно, что отношение разности чисел к их сумме в первой паре равно такому же отношению во второй паре. Докажите, что произведение всех четырёх чисел является квадратом.

2. Волшебный навигатор для метлы Гарри Поттера показывает, сколько осталось лететь до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Гарри Поттер вылетел из дома в Косой переулок. В середине пути навигатор сообщил, что осталось лететь час. В этот момент Драко Малфой наложил на метлу проклятие, в результате чего её скорость уменьшилась и стала постоянной. После того, как Гарри пролетел половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось лететь 2 часа. Через сколько часов после этого он прибудет на место?

3. По кругу расставлены 50 фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает первый игрок (который начинает игру); в противном случае выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

4. На квадратную плитку уронили квадратный лист бумаги $ABCD$ так, что угол A листа попал в угол плитки, сторона BC прошла через угол плитки E , а угол C попал на край плитки. Найдите угол BAE .



5. Для каждого натурального числа n обозначим через $S(n)$ сумму остатков при делении на все числа, меньшие n . Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $S(n) = S(n + 1)$.

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

8 класс

1. Торговец апельсинами привёз на ярмарку 100 коробок. Назовём коробку *забитой*, если в ней не менее 20 апельсинов. Назовём апельсин *генномодифицированным*, если он занимает более $1/5$ коробки, иначе назовём его *натуральным*. В некоторый момент оказалось, что 50 коробок забито. Какую наименьшую долю от общего числа апельсинов могут составлять натуральные апельсины в этот момент?

2. В волшебной стране 2017 городов, в одном из них находится могущественная ведьма, а в остальных 2016 — по гениальному инквизитору. Между некоторыми из городов имеется дорога, причем из каждого города можно попасть в каждый (возможно, с пересадками). Каждый день они перемещаются в соседний город: ведьма перелетает на метле, а инквизиторы скачут на лошади. Если инквизитор и ведьма оказываются в одном городе, то ведьму сжигают на костре. Может ли ведьма гарантировано избежать возмездия при какой-нибудь системе дорог?

3. В четырёхугольнике $ABCD$ известны величины трёх углов: $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 129^\circ$, $\angle D = 102^\circ$. Что больше: AB или $AD + CD$?

4. Для каждого натурального числа n обозначим через $S(n)$ сумму остатков при делении на все числа, меньшие n . Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $S(n) = S(n + 1)$.

5. У Карлсона есть квадратная плитка шоколада с фундуком со стороной 40. В каждой дольке шоколада либо есть орех, либо нет. Карлсон считает шоколадку *вкусной*, если при любом её разломе на две прямоугольные плитки хотя бы в одной из частей будет не меньше 40 орехов. Какое наименьшее число орехов может быть во вкусной шоколадке?