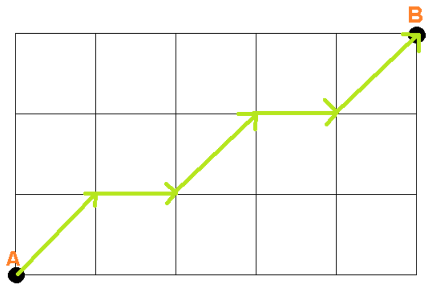
Третий тур олимпиады для 9-10 классов

1. Некоторое десятичное число в системах счисления, в которых его запись заканчивается на единицу, никогда не состоит из четырех цифр, хотя из трех или пяти цифр состоять может. Найдите все такие числа. Ответ обоснуйте.

2. В игру играют два игрока. В начале игры в коробке лежат 6 шариков. Каждый игрок в свой ход может добавить 1 или 2 шарика или удвоить количество шариков в коробке (он сам решает, как именно поступить). Игрок, превысивший 15 шариков, становится проигравшим, а другой игрок объявляется победителем. Найдите и обоснуйте подходящий результат первого хода или докажите, что первый игрок не может выиграть при правильной игре второго.
3. В классе из 24 человек три двоечника и пять отличников, остальные – серядняки. Каждого ученика можно отнести к высоким, средним или низким. Низких 9, высоких 7, двоечники есть каждого роста, а среди середняков (не двоечников и не отличников) всего 3 ученика среднего роста. Сколько среди середняков высоких и сколько низкого роста, если самый высокий ученик в классе – отличник? Ответ обосновать.
4. Назовем число “возрастающим”, если в его записи каждая следующая цифра больше предыдущей. Например, 1234 или 24789. Найдите, сколько из таких чисел в свою очередь могут быть составлены из записи трех простых чисел. Например, 237 (2, 3, 7) или 23457 (2, 3, 457). Ответ обоснуйте, в том числе можно привести текст программы, решающей эту задачу или ее часть.

5. Детский парк имеет размер $R \times C$ блоков. Директор должен выбрать такого школьника, чей голос будет услышан всеми в кратчайшее время. Вопреки законам физики, в этом парке голос распространяется в 8 направлениях (по горизонтали, вертикали и диагоналям) со скоростью 1 блок в секунду. Например, на рисунке ниже время распространения голоса равно 5.



Пусть для каждого школьника известны координаты (X_i, Y_i), которые обозначают его место расположения. Опишите как можно более эффективный алгоритм для определения школьника, которому следует поручить передать сообщение директора остальным.

Ответы и критерии оценивания

1. Рассмотрим числа вида 101_Q и 10001_P, где $Q = P^2$. Эти числа равны $P^4 + 1$. Они удовлетворяют условиям задачи, в частности для всех простых (но не только) P. Так как остаток от деления на некоторое число у них может быть равным 1, только если делитель

равен P, P^2 или P^4. Поэтому они ни в какой системе счисления не могут оканчиваться на 1 и состоять из 4х цифр (в этом случае основание должно находиться между P и P^2). Следовательно, подобных чисел бесконечное количество.
2 балла, если найдены все первые искомые числа из следующих 17, 19, 21, 25, 29 (следующее искомое число **уже** 82).
4 – за утверждение бесконечности с правильными примерами.
6 – за строгое доказательство бесконечности.

2. Выигрывает первый игрок. Ему необходимо удвоить количество шариков.
За правильный обоснованный ответ 6 баллов, за нестрогость обоснования снимается 1-2 балла. Если нет обоснования – 3 балла.

3. 8 – низких, 5 – высоких.
За ответ с обоснованием – 6 баллов, за нестрогость обоснования снимается 1-3 балла. Если нет обоснования – 2 балла.

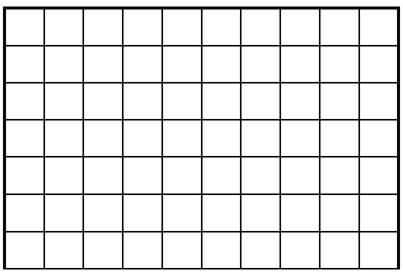
4. Выделим все простые числа правильного вида. Заметим, что максимальное число, которое нужно проверить на простоту – это 56789. Проще всего это сделать с помощью программы, которая перебирает все числа до 56789, проверяет, верно ли что цифры в числе возрастают, и проверяет такое число на простоту перебором возможных делителей, не превосходящих корня квадратного из проверяемого числа.
Таких чисел оказывается 61 и максимальное из них 5689. Пусть они записаны в массиве (списке) q. Тогда с помощью тройного цикла несложно перебрать все потенциально возможные комбинации. Например, на языке Python:

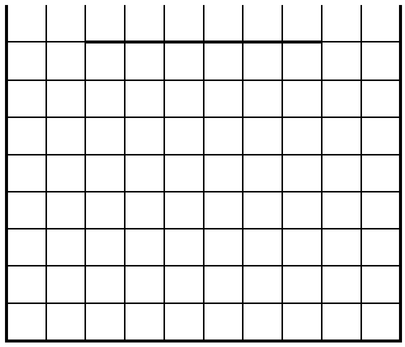
```
ans = []
for i1 in range(len(q)):
    for i2 in range(i1 + 1, len(q)):
        for i3 in range(i2 + 1, len(q)):
            if check(q[i1], q[i2], q[i3]):
                ans.append(str(q[i1]) + str(q[i2]) + str(q[i3]))
```

Здесь функция `check` проверяет, что из `q[i1], q[i2], q[i3]` можно составить требуемое число. Правильный ответ – 56 искомых чисел. Их можно было найти и вручную.

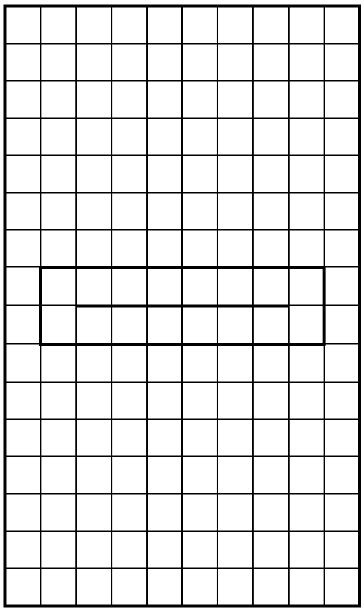
За неправильный ответ, но верный ход решения снималось 1-3 балла.

5. *Решение.* Решим задачу в упрощенной постановке. Пусть школьники стоят, в том числе, в каждом узле границы. То есть сообщение должно дойти до всех граничных точек. Заметим, что из условия задачи следует, что расстояние между двумя точками вычисляется как максимум из разности их x-координат и y-координат. Тогда, геометрическое место оптимальных точек для источника звука есть все целочисленные точки следующего отрезка (а не только центр прямоугольника):





Если такой точки не нашлось, то рассмотрим точки, для которых расстояние от некоторых точек границы на 1 хуже. Это точки следующего прямоугольника вокруг первого отрезка:



И т.д. То есть в данной постановке надо найти точку (соответствующую положению одного из школьников), которая лежит на минимальном из таких концентрических прямоугольников. Сделать это можно за один проход массива с координатами школьников, вычисляя для каждого из них, на каком из концентрических прямоугольников он находится.
Вернемся к исходной постановке задачи. Сначала ограничим все точки со школьниками минимальным охватывающим прямоугольником. Далее решение, по сути, совпадает с описанным выше.

Если приведено решение, в котором перебирается школьник, которого имеет смысл выбрать и правильно ищется расстояние от него до всех остальных, то за него выставляется 3 балла. За неточности в рассуждениях снимается 1-2 балла.