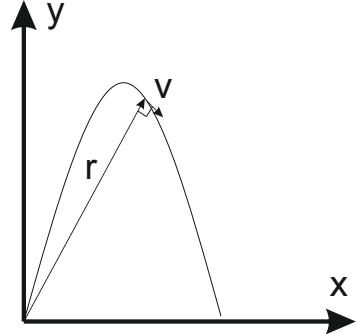


Задача № 1 Тело брошено со скоростью $v = 10$ м/с под углом α : $\sin \alpha = 35/36$. Найдите максимальное удаление тела от точки бросания. Принять $g = 10$ м/с².

Решение

Экстремальное (максимальное) удаление от точки бросания либо при $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$, либо в точке падения камня. Первое условие означает, что радиус-вектор перпендикулярен скорости. Дальность полета определяется выражением:

$$L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 4.55 \text{ м.}$$



Из условия $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$ следует, что $xv_x + yv_y = 0$. Выпишем выражения для x, y, v_x, v_y :

$$\begin{aligned} x &= v \cos \alpha t, \\ y &= v \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}, \\ v_x &= v \cos \alpha, \\ v_y &= v \sin \alpha - gt. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$, получим

$$t^2 - \frac{3v}{g} \sin \alpha t + \frac{2v^2}{g^2} = 0.$$

Решая уравнение, получим

$$t_{\pm} = \frac{3v}{2g} \left(\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{8}{9}} \right).$$

Тело удаляется от точки бросания до момента времени t_- , затем приближается к точке бросания до момента времени t_+ , а затем удаляется до момента падения на землю. Наибольшее удаление в момент времени t_- : $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v \cos \alpha t_-)^2 + (v \sin \alpha t_- - \frac{gt_-^2}{2})^2} \approx 5.31 \text{ м.}$

Ответ: $r_{\text{MAX}} = 5.31 \text{ м.}$

Баллы за задачу

Найдена дальность полета **+2 балла**.

Найдено условие экстремальности удаления от точки бросания **+2 балла**.

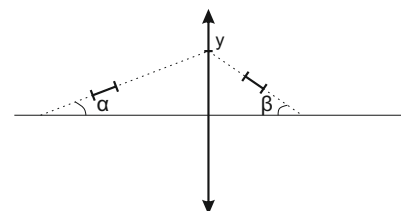
Найдено время для экстремальных удалений **+3 балла**.

Найдено максимальное удаление от точки бросания **+3 балла**.

Задача № 2 Действительным изображением трапеции, основания которой перпендикулярны главной оптической оси тонкой собирающей линзы, является трапеция с теми же углами. Если трапецию отразить относительно большего основания, то её изображением будет прямоугольник. Найдите увеличение большего основания трапеции.

Решение

Изображением отрезка в собирающей линзе будет отрезок (если он целиком находится по одну сторону от фокуса). Выпишем связь между тангенсами углов, которые образуют отрезок и его изображение с главной оптической осью.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{F} \pm \operatorname{tg} \alpha,$$

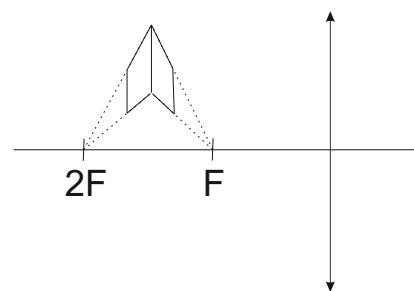
где F - фокусное расстояние линзы. В случае действительного изображения необходимо выбрать "-".

Тогда трапеция может иметь изображение в виде трапеции с теми же углами, если ее стороны "смотрят" на одну из двух точек:

- Центр линзы. Тогда $y = 0$, а следовательно $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$.
- Двойной фокус. Тогда $y = 2F \operatorname{tg} \alpha$, а следовательно $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Для того, чтобы изображением трапеции был прямоугольник, необходимо, чтобы стороны трапеции "смотрели" в фокус. Тогда $y = F \operatorname{tg} \alpha$, а $\operatorname{tg} \beta = 0$.

По условию задачи подходит только один вариант: сначала стороны трапеции "смотрят" на двойной фокус, а затем в фокус.



Тогда большая сторона трапеции находится посередине между двойным фокусом и фокусом. Воспользуемся формулой тонкой линзы для нахождения расстояния, на котором окажется изображение большего основания трапеции.

$$\frac{1}{\frac{3}{2}F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

тогда $b = 3F$.

Увеличение большей стороны

$$\Gamma = \frac{b}{\frac{3}{2}F} = 2.$$

Ответ: $\Gamma = 2$.

Баллы за задачу

Найдены точки, куда могут "смотреть" боковые стороны трапеции, чтобы трапеция изображалась трапецией с теми же углами **+5 балла**.

Указано, что стороны трапеции сначала "смотрели" на двойной фокус, а затем в фокус **+3 балла**.

Найдено увеличение большей стороны **+2 балла**.

Задача № 3 Если амперметр и вольтметр подключить последовательно к идеальному источнику тока, то их показания будут I_1 и U_1 соответственно. Если же их подсоединить параллельно, то показания будут I_2 и U_2 . Найдите ЭДС источника.

Решение

В общем случае необходимо учесть, что амперметр и вольтметр имеют конечные сопротивления. При последовательном соединении вольтметр показывает напряжение на себе, а амперметр показывает общий ток в цепи. Тогда, можно найти вольтметра

$$R_V = \frac{U_1}{I_1}.$$

При параллельном соединении вольтметр показывает напряжение на себе и амперметре. Зная ток через амперметр, можно найти сопротивление амперметра

$$R_A = \frac{U_2}{I_2}.$$

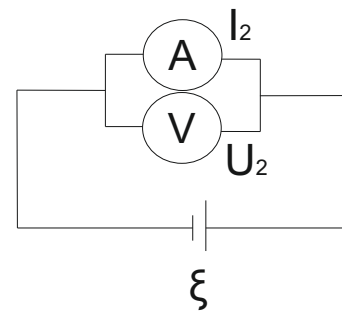
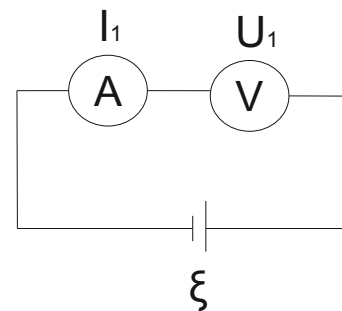
Рассмотрим схему последовательного соединения. Тогда по второму правилу Кирхгофа, получим

$$\xi = I_1(R_V + R_A) = U_1 + \frac{I_1}{I_2}U_2.$$

*Второй способ решения

В силу того, что источник тока идеальный, то при параллельном соединении с вольтметром, вольтметр покажет ЭДС источника $\xi = U_2$.

Ответ: $\xi = U_1 + U_2 I_1 / I_2 = U_2$.



Баллы за задачу

Найдено сопротивление вольтметра +3 балла.

Найдено сопротивление амперметра +3 балла.

Найдено ЭДС источника +4 балла.

Второй способ решения

Найдено ЭДС источника +10 балла.

Задача № 4 Узкая U-образная трубка полностью заполнена водой. Длина каждого участка трубки равна l . Сначала трубка движется вправо с ускорением $a = 0.6g$. Затем трубка движется влево с ускорением $2a$. Найдите, какое количество воды останется в трубке после этого.

Решение

Будем мерить объем в длинах трубки, т.е. начальный объем $3l$. После начала движения, часть воды выльется из левого колена трубки. Найдём уровень воды h_1 , который останется в правом колене. Запишем второй закон Ньютона для центральной части трубки

$$\rho l S a = \rho g l S - \rho g h_1 S,$$

тогда найдём h_1

$$h_1 = \frac{g - a}{g} l = 0.4l.$$

Если теперь остановить систему, то общий объем будет $2.4l$. После начала движения влево, жидкость будет выливаться из правого колена. Пусть h_2 - уровень воды в левом колене, который установится после начала движения влево. Тогда запишем второй закон Ньютона для центральной части трубки

$$\rho l S 2a = \rho g l S - \rho g h_2 S.$$

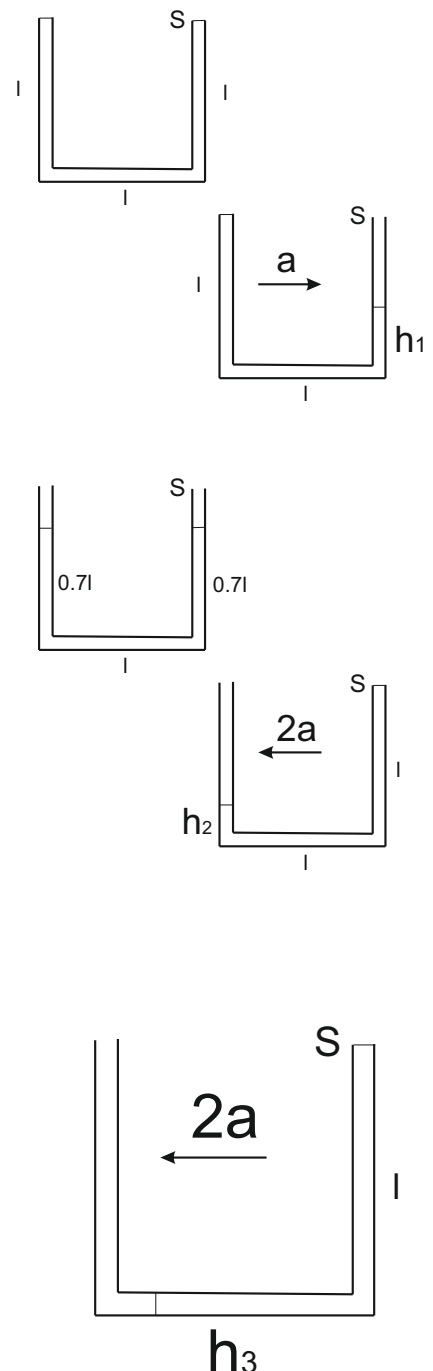
Отсюда найдём h_2

$$h_2 = \frac{g - 2a}{g} l = -0.2l < 0.$$

Отрицательное значение h_2 говорит о том, что вода выльется и из центральной части.

Пусть h_3 - уровень воды в центральной части, тогда запишем для нее второй закон Ньютона

$$\rho h_3 S 2a = \rho g l S,$$



отсюда найдем h_3

$$h_3 = \frac{g}{2a}l = \frac{5}{6}l.$$

Тогда воды останется $l + \frac{5}{6}l = 11l/6$.

Ответ: $11l/6$.

Баллы за задачу

Найдено колено h_1 **+3 балла**.

Найдено, что вода выльется и из средней части **+3 балла**.

Найдено оставшееся количество воды **+4 балла**.

Задача № 5 В сосуде находится переохлажденная вода при температуре $t_1 = -15^\circ\text{C}$. В результате небольшой встряски вода начала кристаллизоваться. Найдите, какая часть воды замерзнет, а также, какую температуру должна была иметь переохлажденная вода, чтобы она вся замерзла.

Решение

В процессе установления теплового равновесия часть воды нагреется до нуля градусов и замерзнет. Выделившееся тепло пойдет на нагревание другой части воды до нуля градусов. Тепловое равновесия наступит при нуле градусов.

$$Q_{отд} = \lambda \Delta m,$$

$$Q_{пол} = cm(t_0 - t_1).$$

Запишем уравнение теплового баланса

$$Q_{отд} = Q_{пол},$$

или

$$cm(t_0 - t_1) = \lambda \Delta m,$$

где λ - удельная теплота замерзания, $t_0 = 0^\circ\text{C}$, m - общая масса переохлажденной воды, Δm - масса замерзшей воды. Тогда доля замерзшей воды будет

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c(t_0 - t_1)}{\lambda} \approx 0.188$$

Вся вода замерзнет при $\Delta m/m = 1$, этому случаю соответствует температура t_1^*

$$t_1^* = -\frac{\lambda}{c} = -79.8^\circ\text{C}.$$

Ответ: $\frac{\Delta m}{m} = \frac{c(t_0 - t_1)}{\lambda} \approx 0.188$.

Баллы за задачу

Выписано выражение для $Q_{отд}$ +**3 балла**.

Выписано выражение для $Q_{пол}$ +**3 балла**.

Найдена доля замерзшей воды +**2 балла**.

Найдена температура, при которой вся вода замерзнет +**2 балла**.