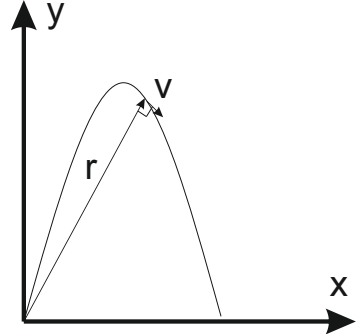


Задача № 1 Тело брошено со скоростью $v = 10$ м/с под углом α : $\sin \alpha = 35/36$. Найдите максимальное удаление тела от точки бросания. Принять $g = 10$ м/с².

Решение

Экстремальное (максимальное) удаление от точки бросания либо при $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$, либо в точке падения камня. Первое условие означает, что радиус-вектор перпендикулярен скорости. Дальность полета определяется выражением:

$$L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 4.55 \text{ м.}$$



Из условия $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$ следует, что $xv_x + yv_y = 0$. Выпишем выражения для x, y, v_x, v_y :

$$\begin{aligned} x &= v \cos \alpha t, \\ y &= v \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}, \\ v_x &= v \cos \alpha, \\ v_y &= v \sin \alpha - gt. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$, получим

$$t^2 - \frac{3v}{g} \sin \alpha t + \frac{2v^2}{g^2} = 0.$$

Решая уравнение, получим

$$t_{\pm} = \frac{3v}{2g} \left(\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{8}{9}} \right).$$

Тело удаляется от точки бросания до момента времени t_- , затем приближается к точке бросания до момента времени t_+ , а затем удаляется до момента падения на землю. Наибольшее удаление в момент времени t_- : $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v \cos \alpha t_-)^2 + (v \sin \alpha t_- - \frac{gt_-^2}{2})^2} \approx 5.31 \text{ м.}$

Ответ: $r_{\text{MAX}} = 5.31 \text{ м.}$

Баллы за задачу

Найдена дальность полета **+2 балла**.

Найдено условие экстремальности удаления от точки бросания **+2 балла**.

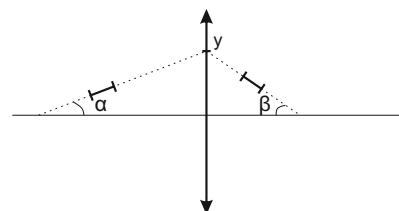
Найдено время для экстремальных удалений **+3 балла**.

Найдено максимальное удаление от точки бросания **+3 балла**.

Задача № 2 Действительным изображением трапеции, основания которой перпендикулярны главной оптической оси тонкой собирающей линзы, является трапеция с теми же углами. Если трапецию отразить относительно большего основания, то её изображением будет прямоугольник. Найдите увеличение большего основания трапеции.

Решение

Изображением отрезка в собирающей линзе будет отрезок (если он целиком находится по одну сторону от фокуса). Выпишем связь между тангенсами углов, которые образуют отрезок и его изображение с главной оптической осью.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{F} \pm \operatorname{tg} \alpha,$$

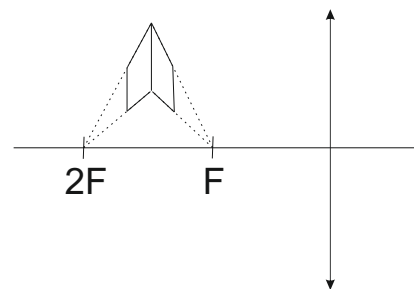
где F - фокусное расстояние линзы. В случае действительного изображения необходимо выбрать "-".

Тогда трапеция может иметь изображение в виде трапеции с теми же углами, если ее стороны "смотрят" на одну из двух точек:

- Центр линзы. Тогда $y = 0$, а следовательно $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$.
- Двойной фокус. Тогда $y = 2F \operatorname{tg} \alpha$, а следовательно $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Для того, чтобы изображением трапеции был прямоугольник, необходимо, чтобы стороны трапеции "смотрели" в фокус. Тогда $y = F \operatorname{tg} \alpha$, а $\operatorname{tg} \beta = 0$.

По условию задачи подходит только один вариант: сначала стороны трапеции "смотрят" на двойной фокус, а затем в фокус.



Тогда большая сторона трапеции находится посередине между двойным фокусом и фокусом. Воспользуемся формулой тонкой линзы для нахождения расстояния, на котором окажется изображение большего основания трапеции.

$$\frac{1}{\frac{3}{2}F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

тогда $b = 3F$.

Увеличение большей стороны

$$\Gamma = \frac{b}{\frac{3}{2}F} = 2.$$

Ответ: $\Gamma = 2$.

Баллы за задачу

Найдены точки, куда могут "смотреть" боковые стороны трапеции, чтобы трапеция изображалась трапецией с теми же углами **+5 балла**.

Указано, что стороны трапеции сначала "смотрели" на двойной фокус, а затем в фокус **+3 балла**.

Найдено увеличение большей стороны **+2 балла**.

Задача № 3 Легкий стержень длины l закреплен шарнирно к потолку. На другом конце стержня закреплен шарик массы m . Второй шарик массы m налетает со скоростью v горизонтально и прилипает к середине стержня. Найдите максимальный угол отклонения стержня от вертикали при дальнейшем движении.

Решение

Момент импульса системы "стержень и два шарика" до удара относительно оси, проходящей через точку подвеса, перпендикулярно рисунку

$$M_1 = \frac{l}{2}mv,$$

момент импульса системы сразу после удара

$$M_2 = \frac{l}{2}m\omega\frac{l}{2} + lm\omega l,$$

где ω - угловая частота вращения стержня.

В силу того, что момент внешних сил для системы равен нулю, то момент импульса системы сохраняется. Отсюда следует, что $M_1 = M_2$ или

$$\frac{l}{2}mv = \frac{5}{4}l^2m\omega.$$

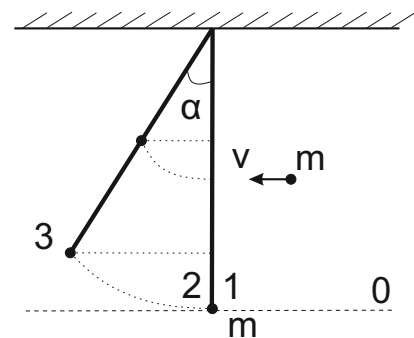
Из последнего уравнения находим $\omega = \frac{2v}{5l}$.

Энергия системы сразу после удара

$$E_2 = \frac{m(\frac{l}{2}\omega)^2}{2} + \frac{m(l\omega)^2}{2} + mg\frac{l}{2} = \frac{5}{8}\frac{4}{25}mv^2 + mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{10} + \frac{mgl}{2}.$$

Энергия системы в момент максимального отклонения

$$E_3 = mg(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha) + mg(l - l\cos\alpha) = 2mgl - \frac{3}{2}mgl\cos\alpha.$$



Энергия системы после столкновения сохраняется $E_2 = E_3$, т.к. работа внешних сил равна нулю, а диссипативные силы не действуют

$$\frac{mv^2}{10} + \frac{mgl}{2} = 2mgl - \frac{3}{2}mgl \cos \alpha/.$$

Отсюда получаем для угла отклонения

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v^2}{15gl}.$$

Ответ: $\cos \alpha = 1 - v^2/(15gl)$.

Баллы за задачу

Найден момент импульса системы до удара **+2 балла**.

Найден момент импульса системы после удара **+2 балла**.

Найдена угловая скорость стержня сразу после удара **+1 балла**.

Найдена энергия системы сразу после удара **+2 балла**.

Найдена энергия системы в момент максимального отклонения **+2 балла**.

Найден косинус угла максимального отклонения **+1 балла**.

Задача № 4 Узкая U-образная трубка полностью заполнена водой. Длина каждого участка трубки равна l . Сначала трубка движется вправо с ускорением $a = 0.6g$. Затем трубка движется влево с ускорением $2a$. Найдите, какое количество воды останется в трубке после этого.

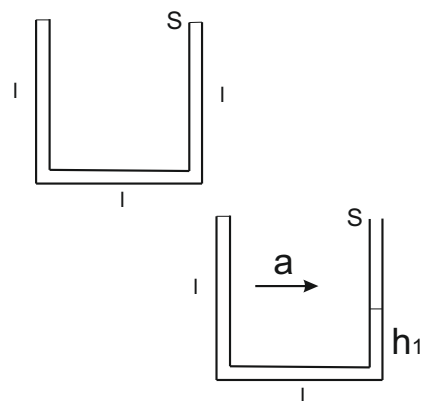
Решение

Будем мерить объем в длинах трубки, т.е. начальный объем $3l$. После начала движения, часть воды выльется из левого колена трубки. Найдем уровень воды h_1 , который останется в правом колене. Запишем второй закон Ньютона для центральной части трубки

$$\rho l S a = \rho g l S - \rho g h_1 S,$$

тогда найдем h_1

$$h_1 = \frac{g - a}{g} l = 0.4l.$$



Если теперь остановить систему, то общий объем будет $2.4l$. После начала движения влево, жидкость будет выливаться из правого колена. Пусть h_2 - уровень воды в левом колене, который установится после начала движения влево. Тогда запишем второй закон Ньютона для центральной части трубки

$$\rho l S 2a = \rho g l S - \rho g h_2 S.$$

Отсюда найдем h_2

$$h_2 = \frac{g - 2a}{g} l = -0.2g < 0.$$

Отрицательное значение h_2 говорит о том, что вода выльется и из центральной части.

Пусть h_3 - уровень воды в центральной части, тогда запишем для нее второй закон Ньютона

$$\rho h_3 S 2a = \rho g l S,$$

отсюда найдем h_3

$$h_3 = \frac{g}{2a} l = \frac{5}{6} l.$$

Тогда воды останется $l + \frac{5}{6}l = 11l/6$.

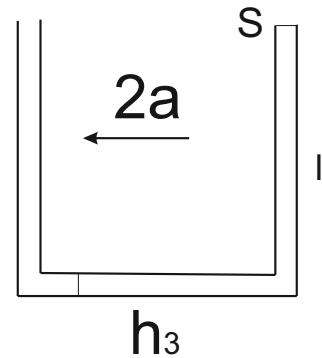
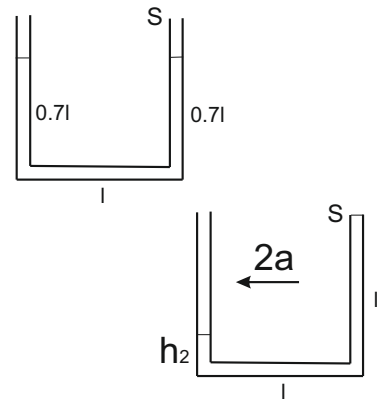
Ответ: $11l/6$.

Баллы за задачу

Найдено колено h_1 + **3 балла**.

Найдено, что вода выльется и из средней части + **3 балла**.

Найдено оставшееся количество воды + **4 балла**.

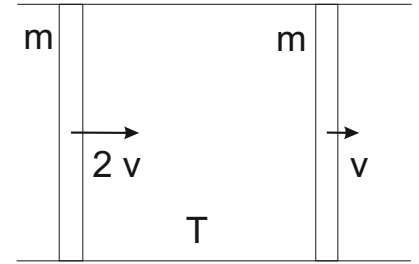


Задача № 5 В гладкой длинной теплоизолированной трубе, расположенной горизонтально, между двумя теплоизолированными поршнями массы m находится ν молей идеального одноатомного газа при температуре T . В начальный момент времени скорости поршней направлены в одну сторону и равны $2v$ и v . Пренебрегая массой газа по сравнению с массой поршней, найдите максимальную температуру газа в процессе движения поршней, если скорость заднего поршня больше, чем у переднего. Все процессы с газом считать квазистационарными.

Решение

Энергия системы "два поршня и газ" в начальный момент времени

$$W_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT = \frac{5}{2}mv^2 + \frac{3}{2}\nu RT.$$



Импульс системы в начальный момент

$$p_1 = mv + m2v = 3mv.$$

Температура газа будет максимальна при равенстве скоростей поршней $v_1 = v_2 = u$. Импульс системы в момент максимальной температуры

$$p_2 = mu + mu = 2mu.$$

Импульс системы сохраняется, т.к. внешние силы равны нулю

$$3mv = 2mu,$$

отсюда $u = 3v/2$.

Энергия системы в момент максимальной температуры

$$W_2 = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{9}{4}mv^2 + \frac{3}{2}\nu RT_1.$$

Внешние и диссипативные силы отсутствуют, тогда энергия сохраняется

$$\frac{5}{2}mv^2 + \frac{3}{2}\nu RT = \frac{9}{4}mv^2 + \frac{3}{2}\nu RT_1.$$

Для максимальной температуры получим

$$T_1 = T + \frac{mv^2}{6\nu R}.$$

Ответ: $T_1 = T + \frac{mv^2}{6\nu R}$.

Баллы за задачу

Найдена энергия системы в начальный момент времени **+2 балла**.

Найден импульс системы в начальный момент времени **+2 балла**.

Найдено условие максимума температуры **+1 балла**.

Записан закон сохранения импульса **+1 балла**.

Найдена энергия системы в момент максимальности температуры **+2 балла**.

Записан закон сохранения энергии **+1 балла**.

Найдена максимальная температура **+1 балла**