3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ
Решения задач

9 класс

1. Петя и Вася играют в следующую игру (ходят они по очереди, начинает Петя). На доске записано число 2017. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру, и записать новое число вместо старого. Выигрывает тот, после хода которого на доске будет записан ноль. Кто из игроков может всегда выигрывать вне зависимости от ходов соперника?

Ответ. Петя.

Решение. Будем называть число *круглым*, если оно заканчивается на 0.

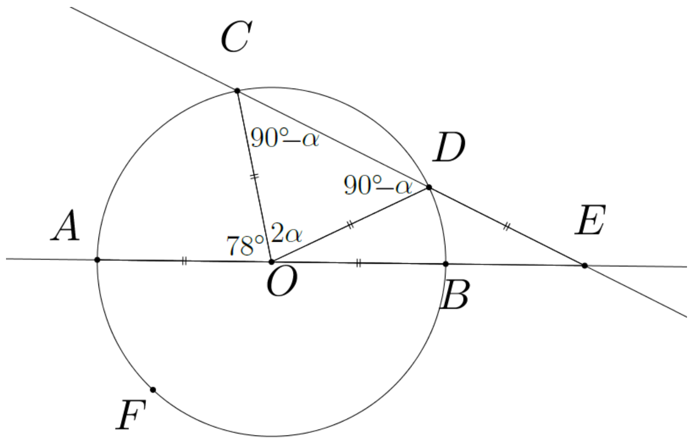
Приведём выигрышную стратегию для Пети: путём вычитания последней цифры он всегда будет получать из записанного на доске числа круглое число.

Своим первым ходом он вычитает из 2017 цифру 7 и получает круглое число 2010. Далее каждым своим ходом Вася будет вычитать ненулевую цифру из круглого числа, и будет получать не круглое число. А следующим своим ходом Петя легко будет получать круглое число, вычитая из написанного перед ним числа его последнюю ненулевую цифру.

Ясно, что рано или поздно игра закончится (точнее, при такой игре Пети будет совершено ровно $\frac{2010}{10} \cdot 2 + 1 = 403$ хода), и Вася не сможет выиграть, получив ноль, т.к. после каждого своего хода будет получать не круглое число. Значит, выиграет Петя.

2. Диаметр AB окружности ω с центром O делит её на две полуокружности. На одной из полуокружностей выбраны точки C и D, а на другой — точка F. Лучи CD и AB пересеклись в точке E. Известно, что $DE = OF$ и $\angle COA = 78°$. Найдите $\angle CFD$.

Ответ. $38°$.



Решение. Пусть $\angle CFD = \alpha$. Т.к. центральный угол в 2 раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу, то $\angle COD = 2\alpha$. В треугольнике COD стороны CO и DO равны как радиусы, поэтому $\angle DCO = \angle CDO = \frac{180^\circ - \angle COD}{2}$. Отсюда $\angle CDO = 90^\circ - \alpha$, и как внешний он равен сумме двух равных внутренних углов равнобедренного треугольника ODE ($DE = OF = OD$). Значит, $\angle DOE = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Угол $\angle AOB$ — развёрнутый, поэтому $180^\circ = 78^\circ + 2\alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, откуда $\alpha = 38^\circ = \angle CFD$.

3. 16 футбольных команд сыграли каждая с каждой ровно по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по N очков. Какое наибольшее возможное значение может принимать N? (Победа — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0.)

Ответ. 22.

Решение. Для начала докажем, что $N \leqslant 22$. Подсчитаем количество сыгранных партий. Каждая команда A из данных 16 команд сыграла с каждой командой B из 15 оставшихся, но при таком подсчёте игра A с B и игра B с A считается дважды. Поэтому игр всего было $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. В каждой из игр суммарно разыгрывается не более трёх очков (в случае победы одной из команд суммарно разыгрывается $3 + 0 = 3$ очка, а в случае ничьи суммарно разыгрывается $1 + 1 = 2$ очка). Поэтому всего суммарно разыгрываемых очков не превосходит $120 \cdot 3 = 360$. По условию у каждой из команд оказалось ровно по N очков, поэтому всего суммарно команды имеют $16N$ очков. Итак, $16N \leqslant 360$, откуда $N \leqslant \frac{360}{16} = 22,5$. А так как у каждой команды количество очков целое, то $N \leqslant 22$.

Приведём пример возможных исходов игр, при котором у каждой команды могло быть ровно 22 очка. Представим себе, что команды находятся в вершинах правильного 16-угольника. Пусть каждая команда выигрывает у следующих семи, идущих за ней по часовой стрелке, проигрывает предыдущим семи, идущих до неё против часовой стрелки, и играет вничью с противоположной командой. Тогда условие выполняется, и у каждой команды ровно $3 \cdot 7 + 1 = 22$ очка.

Критерии проверки. Доказательство того, что $N \leqslant 22$, оценивалось в 4 балла. Наличие конкретного примера на $N = 22$ оценивалось в 3 балла. Фраза вида "У каждой команды 1 ничья и по 7 побед и поражений" примером не является и оценивалась в 0 баллов.

4. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках. Её вершина находится в точке $P(0, 2)$. Прямые $y = kx + 5$ и $y = -kx + 5$ касаются параболы в точках Q и R соответственно. Известно, что PQR — равносторонний треугольник. Найдите $a + b + c$.

Ответ. 1.

Решение. Вершина параболы находится выше оси Ox, и при этом она пересекается с осью Ox. Значит, её ветви не могут быть направлены вверх, поэтому $a < 0$. Как известно, абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет вид $-\frac{b}{2a}$. По условию абсцисса вершины равна 0, поэтому $-\frac{b}{2a} = 0$, т.е. $b = 0$.

Парабола $y = ax^2 + c$ проходит через точку $(0, 2)$. Поэтому при x, равном 0, значение y равно 2, т.е. $c = 2$. Итак, парабола имеет вид $y = ax^2 + 2$. Она симметрична относительно оси ординат, поэтому и её точки пересечения Q и R с осью абсцисс симметричны относительно центра координат.

Не нарушая общности, $k < 0$. Пусть прямая $y = kx + 5$ касается параболы в точке R с координатами $(t, at^2 + 2)$ (при этом $t > 0$). Тогда точка Q имеет координаты $(-t, at^2 + 2)$. Пусть M — середина отрезка QR, она имеет координаты $(0, at^2 + 2)$.

PM — медиана в равностороннем треугольнике PQR, поэтому $\angle MPR = 30°$, $\angle PRM = 60°$, $\angle PMR = 90°$. Как известно, в прямоугольном треугольнике с углами $30°, 60°, 90°$ меньший катет в 2 раза меньше гипотенузы, а больший катет в $\sqrt{3}$ раз больше меньшего катета. Найдём катеты: $PM = y_P - y_R = 2 - (at^2 + 2) = -at^2$, $MR = x_R - x_M = t$. Значит, $\sqrt{3} = \frac{PM}{MR} = \frac{-at^2}{t} = -at$.

График прямой $y = kx + 5$ имеет с графиком параболы $y = ax^2 + 2$ ровно одну общую точку $(t, at^2 + 2)$. Поэтому уравнение $ax^2 + 2 = kx + 5$ имеет ровно один корень $x = t$. Значит, дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + 2 - (kx + 5) = ax^2 - kx - 3 = 0$ равен 0. Этот дискриминант равен $k^2 + 12a$.

Мы имеем систему

$$\begin{cases} at = -\sqrt{3}, \\ at^2 - kt - 3 = 0, \\ k^2 + 12a = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $t = -\frac{\sqrt{3}}{a}$, подставим это во второе уравнение: $a \cdot \frac{3}{a^2} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} - 3 = 0$. Отсюда следует, что $a = 1 + \frac{k\sqrt{3}}{3}$. Подставим это в третье уравнение: $k^2 + 12(1 + \frac{k\sqrt{3}}{3}) = 0 = (k + 2\sqrt{3})^2$. Отсюда $k = -2\sqrt{3}$, поэтому $a = 1 + \frac{(-2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{3} = -1$.

Итак, исходная парабола имела вид $y = -x^2 + 2$, и $a + b + c = 1$.

Критерии проверки. Доказательство того, что $b = 0$, оценивалось в 1 балла. Доказательство того, что $c = 2$, оценивалось в 1 балл. Доказательство того, что $a = -1$, оценивалось в 5 баллов.

5. Для любых чисел m и n определим операцию: $m \star n = \frac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\ldots((2017 \star 2016) \star 2015)\ldots) \star 1$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Решение. В данном выражении все присутствующие числа положительны, поэтому после применения каждой следующей операции мы всегда будем получать положительное число. Значит, никогда не возникнет такой неопределённости, когда мы будем делить на 0.

Пусть $((\ldots((2017 \star 2016) \star 2015)\ldots) \star 4) \star 3 = A$. Тогда значение искомого выражения равно

$$(A \star 2) \star 1 = \frac{A+2}{2A+4} \star 1 = \frac{1}{2} \star 1 = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + 4} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Критерии проверки. За отсутствие слов о возможной неопределённости баллы не снижались.