

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

9 класс

1. Петя и Вася играют в следующую игру (ходят они по очереди, начинает Петя). На доске записано число 2017. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру, и записать новое число вместо старого. Выигрывает тот, после хода которого на доске будет записан ноль. Кто из игроков может всегда выигрывать вне зависимости от ходов соперника?

2. Диаметр AB окружности ω с центром O делит её на две полуокружности. На одной из полуокружностей выбраны точки C и D , а на другой — точка F . Лучи CD и AB пересеклись в точке E . Известно, что $DE = OF$ и $\angle COA = 78^\circ$. Найдите $\angle CFD$.

3. 16 футбольных команд сыграли каждая с каждой ровно по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по N очков. Какое наибольшее возможное значение может принимать N ? (Победа — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0.)

4. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках. Её вершина находится в точке $P(0, 2)$. Прямые $y = kx + 5$ и $y = -kx + 5$ касаются параболы в точках Q и R соответственно. Известно, что PQR — равносторонний треугольник. Найдите $a + b + c$.

5. Для любых чисел m и n определим операцию: $m \star n = \frac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\dots((2017 \star 2016) \star 2015) \dots) \star 1$.

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

10 класс

1. На клетчатой доске 20×17 расставлены несколько шахматных коней. Каждую секунду какой-нибудь один из коней делает ход на свободное поле. Через некоторое время оказалось, что каждый конь побывал на всех полях ровно по одному разу и вернулся на исходное поле. Докажите, что был момент, когда все кони стояли не на своих полях.

2. Числовая последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots$ определяется следующими условиями: $x_0 \in [0, 1)$, а каждый следующий член x_n равен или $2x_{n-1}$, если $x_{n-1} < \frac{1}{2}$, или $2x_{n-1} - 1$, если $x_{n-1} \geq \frac{1}{2}$. Сколько существует различных $x_0 \in [0, 1)$, при которых $x_0 = x_5$?

3. P — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что центры описанных окружностей треугольников APB и CPD лежат на описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $AC + BD = 2(BC + AD)$.

4. Натуральное число N таково, что сумма четырёх его наименьших натуральных делителей (включая 1) равна самому числу. Чему может быть равно N ? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

5. Все девятизначные числа, в записи которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно по разу, выписаны в строку в порядке возрастания. Петя посчитал все разности соседних чисел. Сколько таких разностей у него встретилось нечётное количество раз?