3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ
Решения задач

10 класс

1. На клетчатой доске 20×17 расставлены несколько шахматных коней. Каждую секунду какой-нибудь один из коней делает ход на свободное поле. Через некоторое время оказалось, что каждый конь побывал на всех полях ровно по одному разу и вернулся на исходное поле. Докажите, что был момент, когда все кони стояли не на своих полях.

Решение. Рано или поздно каждый конь должен уйти с клетки, на которой он стоит. Рассмотрим момент, когда последний конь ушёл со своей клетки (т.е. остальные кони уже со своих клеток ушли, а теперь ушёл и последний). Тогда теперь все кони стоят не на своих полях: каждый из остальных коней уже ушёл со своего исходного поля и не мог на него вернуться, поскольку ещё не побывал на этой самой клетке, которую только что освободили.

2. Числовая последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ определяется следующими условиями: $x_0 \in [0, 1)$, а каждый следующий член x_n равен или $2x_{n-1}$, если $x_{n-1} < \frac{1}{2}$, или $2x_{n-1} - 1$, если $x_{n-1} \geqslant \frac{1}{2}$. Сколько существует различных $x_0 \in [0, 1)$, при которых $x_0 = x_5$?

Ответ. 31.

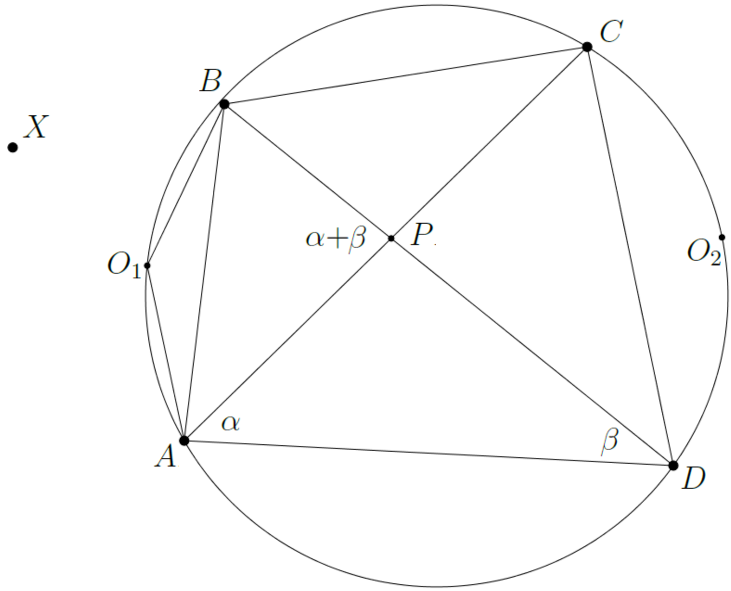
Решение. $[x]$ — *целая часть* числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. $\{x\}$ — *дробная часть* числа x — это разность $x - [x]$.

Упростим запись исходной рекуррентной формулы $x_n = \{2x_{n-1}\}$. Дробная часть каждого следующего числа — это удвоенная предыдущая дробная часть. Значит, если $x_0 = x_5$, то их дробные части равны: $x_0 = \{x_0\} = \{32x_0\} = x_5$. У чисел $32x_0$ и x_0 равны их дробные части. Это равносильно тому, что их разность $31x_0$ является целым числом. Т.к. $x_0 \in [0, 1)$, то $0 \leqslant 31x_0 < 31$, и оно может равняться одному из чисел $0, 1, 2, \ldots 30$.

Итак, x_0 может принимать значения $0, \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \dots \frac{30}{31}$. Таких чисел всего 31.

Критерии проверки. Ответ оценивался в 1 балл. Ответ с перечислением возможных x_0 оценивался в 2 балла.

3. P — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что центры описанных окружностей треугольников APB и CPD лежат на описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $AC + BD = 2(BC + AD)$.



Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников APB и CPD соответственно. Пусть $\angle PAD = \alpha, \angle PDA = \beta$. Тогда по свойству внешнего угла $\angle BPA = \alpha + \beta$.

Выберем произвольную точку X на большей дуге AB описанной окружности треугольника APB. Четырёхугольник $APBX$ является вписанным, поэтому $\angle AXB + \angle APB = 180°$. Угол AO_1B является центральным, и вдвое больше вписанного угла, опирающегося на меньшую дугу AB, поэтому $\angle AO_1B = 2\angle AXB = 2(180° - \alpha - \beta) = 360° - 2\alpha - 2\beta$. Четырёхугольник $ADBO_1$ по условию является вписанным, поэтому $180° = \angle AXB + \angle ADB = 360° - 2\alpha - 2\beta + \beta$, откуда $2\alpha + \beta = 180°$. Рассуждая аналогично для точки O_2, получим $\alpha + 2\beta = 180°$. Решая эту систему, находим $\alpha = \beta = 60°$. Значит, треугольник

APD является равносторонним. Заметим также, что по свойствам вписанных углов $\angle DBC = \angle DAC = 60^\circ$ и $\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$, поэтому треугольник BCP также является равносторонним.

Итак,

$$AC+BD = AP+CP+BP+PD = AD+BC+BC+AD = 2(BC+AD).$$

4. Натуральное число N таково, что сумма четырёх его наименьших натуральных делителей (включая 1) равна самому числу. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Ответ. Таких N не существует.

Решение. Заметим, что N не может быть нечётным числом, так как иначе все делители N будут нечётны, и сумма четырёх искомых нечётных квадратов окажется чётной, и не будет равняться N. Значит, число N чётно. Тогда два его наименьших делителя известны — это 1 и 2. Чтобы сумма четырёх делителей оказалась чётной, необходимо, чтобы два оставшихся слагаемых были разной чётности, так как иначе общая сумма окажется нечётной. Разберём два случая.

Предположим, N делится на 4. Тогда 4 входит в число четырёх наименьших делителей N. Тогда $N = 1 + 2 + 4 + d = 7 + d$, откуда $7 = N - d$. Число N делится на d, поэтому и 7 делится на $d > 1$. Значит, $d = 7$, тогда $N = 7 + 7 = 14$. Противоречие с делимостью N на 4.

Предположим, N не делится на 4. Тогда следующий после 2 наименьший делитель — это некоторое простое число p. Оставшийся четвёртый делитель чётен и не делится на 4, поэтому он равен $2p$. Тогда

$$n = 1 + 2 + p + 2p = 3 + 3p,$$

поэтому N делится на 3. Тогда 3 входит в число его четырёх наименьших делителей, и, очевидно, оно и должно равняться нашему p. Тогда $N = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Противоречие с неделимостью N на 4.

Критерии проверки. Ответ оценивался в 0 баллов. Случай, когда N не делится на 4, оценивался в 3 балла. Случай, когда N не делится на 4, оценивался в 4 балла.

5. Все девятизначные числа, в записи которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно по разу, выписаны в строку в порядке возрастания. Петя посчитал все разности соседних чисел. Сколько таких разностей у него встретилось нечётное количество раз?

Ответ. 1.

Решение. Назовём девятизначное число *хорошим*, если в его записи которого каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно по разу.

Посчитаем количество выписанных хороших чисел. Первую цифру такого числа можно выбрать 9 способами (любую из 9), вторую цифру — 8 способами (все ненулевые, кроме первой), третью — 7 способами (все ненулевые, кроме первых двух), ..., девятую — 1 способом. Значит, всего таких чисел $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$. Поэтому Петя посчитал $9! - 1$ разностей — нечётное количество.

Докажем, что все эти разности, выписанные в строчку друг за другом, будут симметричны: если j-я слева разность r, то и j-я справа разность тоже равна r. Отсюда будет следовать, что все разности, кроме центральной, разбиваются на пары одинаковых, и только центральная разность встретится нечётное количество раз.

Для каждого хорошего числа рассмотрим *симметричное* ему — такое, которое получается из данного заменой каждой цифры на дополняющую её до 10 (например, симметричным к числу 218439756 будет 892671354, и наоборот). Ясно, что симметричное к хорошему числу также будет хорошим. Также ясно, что симметричное к симметричному — это исходное число. Заметим также, что симметричное число в сумме с исходным всегда даёт 1111111110 (легко понять, если складывать эти числа столбиком).

Пусть $N_1 < N_2$ — два соседних хороших числа с разностью s. Рассмотрим симметричные им числа. Заметим, что эти симметричные числа окажутся соседними в ряду хороших чисел (иначе между ними нашлось бы какое-то ещё хорошее число, но симметричное к нему тоже бы оказалось хорошим и находилось бы между N_1 и N_2, а они являются соседними). Разность этих симметричных чисел равна

$$1111111110 - N_1 - (1111111110 - N_2) = N_2 - N_1 = s,$$

т.е. разности исходных чисел. Отсюда следует, что все разности, кроме центральной, разбиваются на пары одинаковых, и она единственная встречается нечётное количество раз.

Критерии проверки. Ответ оценивался в 1 балл. Доказательство нечётности количества хороших чисел оценивалось в 1 балл.