Командная устная олимпиада, 8-9 класс, 2016

1. Известно, что

$$\begin{cases} x - y > 97, \\ x^2 - \frac{1}{y+\frac{1}{x}} > 2, \\ x + \frac{y}{z} + \frac{z}{x+57y} = 2016. \end{cases}$$

Верно ли, что $\frac{x+2\frac{y}{z}}{\frac{1}{y+\frac{1}{x}}+(x-y)} > 95$?

Ответ: нет, т.к. при $x = 100, y = 0$ имеем: $z = 191600$, откуда и получается ответ.

2. Вася и Лёша написали наборы целых чисел. Вася написал все наборы чисел длины n с элементами $a_1, a_2, ..., a_n$ такими, что $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \leq k$. Лёша написал все наборы чисел длины k с элементами $b_1, b_2, ..., b_k$ такими, что $|b_1| + |b_2| + ... + |b_k| \leq n$. Докажите, что Лёша и Вася написали одинаковое число наборов.

Решение: подсчитаем число наборов, которые написал Лёша. Предположим, что всего r элементов отличных от нуля в каком-то наборе. Их абсолютные значения дают набор положительных чисел $c_1, c_2, ..., c_r$ таких, что $c_1 + c_2 + ... + c_r \leq k$. Мы можем добавить один положительный элемент c_0 такой, что $c_0 + c_1 + ... + c_r = k + 1$. Таких наборов всего будет C_k^r. Задав любой такой набор, мы можем выбрать r чисел в наборе Лёши так, чтобы каждое из r чисел имело знак. Таким образом, Лёша написал всего наборов

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r C_k^r 2^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_n^r C_k^r 2^r.$$

Сумму можно брать до бесконечности, поскольку для $r > \min\{k, n\}$ числа в наборе равны нулю. Отсюда видно, что если мы поменяем n и k местами, у нас получится то же число.

3. Пусть $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ - попарно различные подмножества множества $\{1, 2, ..., n\}$. Найдите максимум величины

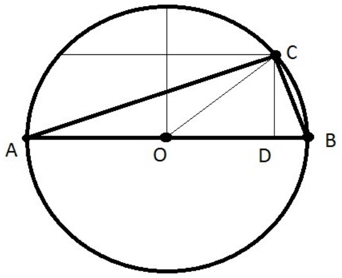
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|},$$

при условии, что $A_{2n+1} = A_1$.

Решение: Покажем, что для всех $i \neq j$, $\frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} \leq \frac{1}{2}$. Если A_i и A_j не пересекаются, то эта дробь равна 0. Предположим без ограничения общности, что $|A_i| \leq |A_j|$. Если они пересекаются, заметим, что $|A_j| \geq 2$. Также $|A_i \cap A_j| \leq |A_i|$. Таким образом, $\frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} \leq \frac{1}{2}$. Это означает, что наибольшее значение, которое может принять сумма, равно n. Оно достигается для $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{2, 3\}, ..., A_{2n-1} = \{n\}, A_{2n} = \{n, 1\}$.

4. Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c, если известно, что медиана, проведённая к c, есть среднее геометрическое его катетов.

Решение:



Пусть прямоугольный треугольник ABC - искомый. Из середины O его гипотенузы $AB = c$ опишес окружность радиуса $\frac{c}{2}$. Как известно, она будет описанной около треугольника ABC. Через вершину C проводим высоту h_c. Вычислим площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

По условию $|AC| \cdot |CB| = |CO|^2 = \frac{c^2}{4}$, но $|AC| \cdot |CB| = 2S$. Значит, $c \cdot h_c = \frac{c^2}{4}$. Следовательно, $h_c = \frac{c^2}{4}$. Поэтому вершина C является одной из точек пересечения окружности, построенной на отрезке AB данной длины c как на диаметре и прямой, параллельной AB и отстоящей от AB на расстояние $\frac{c}{4}$.

5. В зале находятся 100 человек, каждый из которых знаком по крайней мере с 67 из остальных присутствующих. Можно ли утверждать, что в зале непременно найдутся четыре человека, из которых любые два знакомы друг с другом? Считаем, что если A знает B, то и B знает A.
Решение: Ответ положительный. В самом деле, пусть Z - множество людей, находящийся в зале. Наши рассуждения упрощаются, если мы условимся считать, что каждый из тех, кто находится в зале, знаком сам с собой. Такое соглашение не меняет утверждения задачи, которое требуется доказать. Приняв его, мы можем утверждать, что каждый $X \in Z$ не знаком не более, чем с 32 членами множества Z. Пусть A - произвольный элемент Z. Если все, кто не знаком с A, покинут зал, что множество Z_1 оставшихся людей будет насчитывать не менее, чем $100 - 32 = 68$ человек. Пусть B -любой отличный от А элемент Z_1. Если зал теперь покинут все, кто не знаком с B, то оставшиеся в зале образуют множество Z_2, в котором насчитывается не менее $68 - 32 = 36$ человек. Пусть C - элемент Z_2, отличный от A и от B. После того, как из зала выйдут все, кто не знаком с C, в зале останется не менее 36-32=4 человека, и среди них найдется человек, отличный от A, B и C. Обозначим его через D. Тогда A, B, C и D образуют искомую четверку людей, т.к. D знаком с A, B, C; C знаком с A, B, наконец, B знаком с A.

6. Квадратная таблица, содержащая n строк и n столбцов (n-нечетное число), заполнена числами $1, 2, ...n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа. Кроме того, таблица заполнена симметрично относительно одной своей диагонали. Верно ли, что на этой диагонали встречаются все числа от 1 до n?
Решение: Верно. Пусть k - любое из чисел $1, 2, ..., n$. Оно встречается в таблице нечетное число раз (по одному в каждой строке). Однако вне диагонали, являющей осью симметрии таблицы, оно встречается четное число раз, так как таблица симметрична. Поэтому k обязательно встретится на этой диагонали.

7. Пусть m, n, p, l - натуральные числа. Если у следующей системы:

$$\begin{cases} np^2 + ml^2 \leq 23456, \\ mn + p^7 l = 1626, \\ m(l+1)^p + npl = 2197 + m, \end{cases}$$

есть решения, то предъявить то из них, для которого сумма $m+n+p+l$ минимальна. Иначе - доказать, что решений нет.

Решение: $m(l+1)^p - m = m((l+1)^p - 1) \vdots l$, тогда из последней строчки системы получаем, что $2197 = 13^3 \vdots l$, откуда $l = 1, 13, 13^2$ или 13^3. Из первой строчки системы $l^2 \leq ml^2 \leq 23456$, откуда $l = 1$ или $l = 13$. Далее, $lp^7 \leq 1626$, откуда $p = 1, 2$ при $l = 1$ и $p = 1$ при $l = 13$. Остается рассмотреть три случая: $(l, p) = (1, 1), (1, 2), (13, 1)$. В каждом случае второе и третье уравнение системы дают соотношения на m, n, которые приводят к квадратному уравнению без целых решений. Ответ: решений нет.

8. Доказать, что если натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^n + y^n = z^n,$$

то $\min(x, y) \geq n$. (Ссылаться на великую теорему Ферма запрещено.)
Решение: не уменьшая общности, считаем $x \leq y$. Поскольку $z^n = x^n + y^n > y^n$, то $z > y$, откуда $z \geq y + 1$. Возведем обе части этого равенства в степень n, получим:

$$z^n \geq (y+1)^n = y^n + C_n^1 y^{n-1} + ... + 1 \geq y^n + ny^{n-1},$$

откуда, учитывая исходное уравнение, получаем, что $x^n \geq ny^{n-1}$, но $x \leq y$, поэтому $x^n \geq nx^{n-1}$, т.е. $x \geq n$, что и требовалось.

9. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC - в точке F. Биссектриса угла AEC пересекает сторону BC в точке M и сторону AD в точке N, а биссектриса угла BFD пересекает сторону AB в точке P и сторону CD в точке Q. Доказать, что четырехугольник $MPNQ$ - ромб.
Решение: Пусть $O = EN \bigcap FP$. Рассмотрим треугольники EAF, ECF, EOF. Каждый из углов при основании EF в треугольнике EOF равен среднему арифметическому углов треугольников EAF и ECF при той же вершине. Отсюда следует, что и третий угол $\angle EOF$ треугольника EOF равен среднему арифметическому углов $\angle EAF$ и $\angle ECF$ треугольников EAF и ECF, противолежащих общему основанию EF. Отсюда $\angle PON = \frac{\angle EAF + \angle BCD}{2}$. Но $\angle EAF + \angle BCD = 180$, т.к. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Отсюда $\angle PON = 90^0$. Далее, в треугольнике EQP имеем: EO - биссектриса (по построению) и высота (по только что доказанному). Значит, $QO = OP$. Аналогично, взяв треугольник FNM получаем, что $NO = OM$. Т.о. диагонали $ABCD$ пересекаются под прямым углом и делятся точкой пересечения пополам. Значит, $ABCD$ - ромб.