

Олимпиада СУНЦ МГУ

9 класс

1. Пусть x и y – натуральные числа, такие, что $x + y$ – простое число и $x^2 + y^2$ делится на $x + y$. Сколько различных значений может принимать пара чисел $(x; y)$? (Пары, отличающиеся перестановкой чисел, считаются различными)
2. В равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD ($BC < AD$) проведены высота BH и диагональ BD , которая оказалась биссектрисой угла CDA . Угол ABH на 30° больше угла CBD . Найдите угол HBD .
3. На презентации фирмы «Рога и Копыта» было 30 рыцарей и обычных людей. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а обычные люди могут говорить все, что угодно. Их всех усадили за один круглый стол. Во время неофициальной части каждый из них сделал заявление: «Рядом со мной сидит обычный человек». Какое наибольшее количество рыцарей могло сидеть за столом?
4. Квадрат 8×8 распилили на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×4 (и тот, и тот присутствует хотя бы в одном экземпляре). При этом общая длина распилов оказалась равна 54. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло получиться?
5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом. l – их общая внешняя касательная. Окружность ω касается ω_1 и ω_2 , а также прямой l в точке A . Найдите площадь треугольника AO_1O_2 , если радиус ω_1 равен 4, а радиус ω_2 равен 9.
6. Решите в натуральных числах уравнение $(1 + n^k)^l = 1 + n^m$, $l > 1$. В ответ запишите $n + k + l + m$.

Олимпиада СУНЦ МГУ

10 класс

1. Какое минимальное количество коней нужно поставить на доску 5×5 , чтобы каждая пустая клетка была бита хотя бы одним конем?
2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC с углом $\angle ABC = 70^\circ$ выбраны точки E и F , а на боковых сторонах AB и BC – точки P и Q так, что $AP + AE = CQ + CF = AC$. Каков угол (в градусах) между прямыми PF и EQ ?
3. Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать 4 экзамена. За каждый экзамен можно получить оценку от 1 до 5. Для поступления достаточно получить в сумме 17 баллов, не получив ни одной оценки ниже 3. Сколькими способами можно сдать экзамены, чтобы поступить?
4. Найдите три последние цифры суммы $1^{100} + 2^{100} + \dots + 999^{100} + 1000^{100}$.
5. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает стороны BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BKL .
6. Найдите сумму тангенсов углов величиной $1^\circ, 5^\circ, 9^\circ, 13^\circ, \dots, 173^\circ, 177^\circ$.