

XVI КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ



XVI KOLMOGOROV READINGS

ADVANCED EDUCATION AND SCIENCE CENTER

**Proceedings of the
XVI International Scientific Conference of students
“Kolmogorov readings”
May 3-7, 2016**

MATHEMATICS

Moscow

2016

**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
(факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова**

**Материалы
XVI Международной научной конференции школьников
“Колмогоровские чтения”
3-7 мая 2016**

МАТЕМАТИКА

**Москва
2016**

Председатель организационного комитета
XVI Международной научной конференции школьников

“Колмогоровские чтения”:

академик В.А. Садовничий

Редакционный совет сборника тезисов “Математика”:

В.Н. Дубровский (председатель), В.В. Вавилов, В.Л. Натяганов

Материалы

XVI Международной научной конференции школьников

“Колмогоровские чтения”

В настоящий сборник вошли тезисы приглашённых докладчиков

XVI Международной научной конференции школьников

“Колмогоровские чтения” по секции

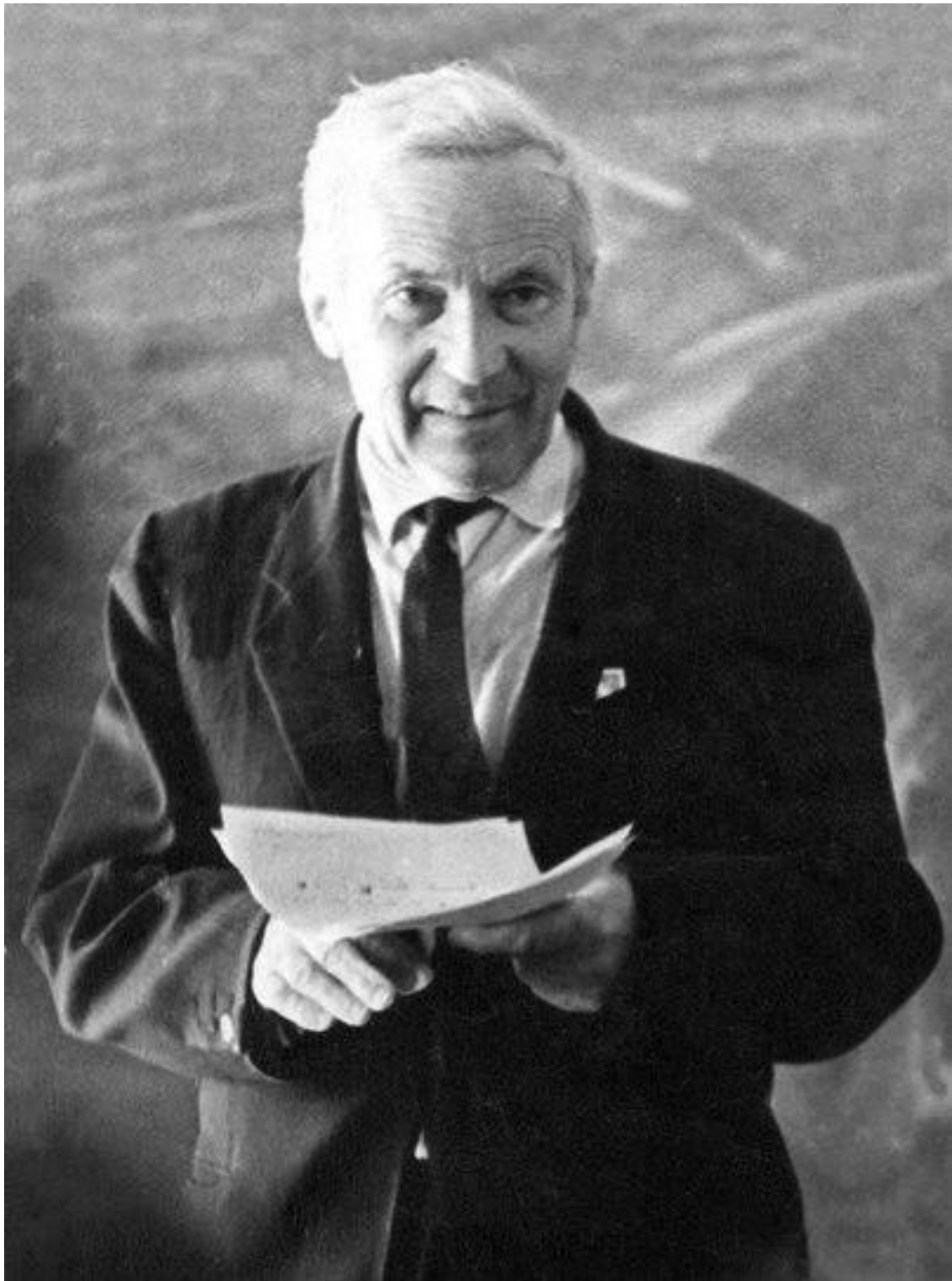
“Математика”.

© Специализированный учебно-научный центр (факультет) –

школа-интернат имени А.Н. Колмогорова

Московского государственного университета имени

М.В. Ломоносова, 2016 г.



*Как в спорте не сразу ставят рекорды, так и подготовка к настоящему
научному творчеству требует тренировки.*

А.Н. Колмогоров

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задача томсона для трех, четырех и шести зарядов	7
Центральные точки треугольника, связанные с некоторыми экстремумами	8
О некоторых способах применения метода математической индукции в теории чисел фибоначчи.....	9
Геометрические миниатюры	11
Fractals in thai culture	12
Частицы	13
Построения в задачах японской храмовой геометрии	14
Определение количества действительных корней уравнения четвертой степени по его коэффициентам.....	15
Исследование теоремы ферма-торричелли с применением геометрического практикума	16
Математика электрических цепей	17

ЗАДАЧА ТОМСОНА ДЛЯ ТРЕХ, ЧЕТЫРЕХ И ШЕСТИ ЗАРЯДОВ

Масленникова Елизавета

10 класс, МБОУ «Физико-математический лицей», г. Сергиев Посад

Научный руководитель: Забавин Валерий Николаевич, д. ф.-м. н.

Цель работы: доказать равновесность известных расположений на сфере трех, четырех и шести одинаковых зарядов с помощью методов элементарной математики.

В начале XX века, конструируя модель атома, английский физик Джозеф Джон Томсон рассматривал задачу о равновесном расположении зарядов на сфере. После открытия атомного ядра эта задача была отложена, а в последнее время вновь привлекла к себе внимание математиков [1,2]. В некоторых случаях равновесное расположение известно (для небольшого числа зарядов). В части этих случаев равновесность доказана. В работе [1] сообщается, что для трех и четырех зарядов доказательства выполнены с помощью неравенств между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим, но самих доказательств не приводится. В этой же работе выполнены доказательства для шести и двенадцати зарядов с помощью методов, известных узкому кругу специалистов.

Вывод: доказана равновесность известного расположения на сфере одинаковых зарядов для трех зарядов (правильный треугольник, плоскость которого проходит через центр сферы), четырех зарядов (правильный тетраэдр) и шести зарядов (правильный октаэдр).

Список литературы:

1. Н. Н. Андреев, В. А. Юдин. Экстремальные расположения точек на сфере // Математическое просвещение (третья серия). Вып. 1 – М.: МЦНМО, 1997.
2. В. А. Юдин. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 2.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА, СВЯЗАННЫЕ С НЕКОТОРЫМИ ЭКСТРЕМУМАМИ

Тимофеев Даниил

10 класс, МБОУ «Физико-математический лицей», г. Сергиев Посад

Научный руководитель: Забавин Валерий Николаевич, д. ф.-м. н.

Цель работы: узнать, являются ли центральными точками треугольника центр вписанного в него равностороннего треугольника минимальной площади и центр невписанного равностороннего треугольника минимальной площади (цель работы подсказана наблюдением, что большинство замечательных в интуитивном смысле точек треугольника являются центральными [1]).

Показано, что эти точки имеют такие барицентрические координаты (выраженные через длины сторон и радиус описанной окружности):

$$p_1:q_1:r_1 = a \cdot (\sqrt{3} \cdot a \cdot R + b \cdot c) : b \cdot (\sqrt{3} \cdot b \cdot R + a \cdot c) : c \cdot (\sqrt{3} \cdot c \cdot R + a \cdot b),$$

$$p_2:q_2:r_2 = a \cdot (-\sqrt{3} \cdot a \cdot R + b \cdot c) : b \cdot (-\sqrt{3} \cdot b \cdot R + a \cdot c) : c \cdot (-\sqrt{3} \cdot c \cdot R + a \cdot b).$$

Уравнение прямой, проходящей через эти точки, в барицентрических координатах: $p \cdot (a^2 - b^2) + q \cdot (c^2 - a^2) + r \cdot (b^2 - c^2) = 0$; также на этой прямой лежат точка Лемуана и точка пересечения медиан.

В работе найдены две центральные точки, которых нет в энциклопедии Кимберлинга.

Вывод: полученные координаты удовлетворяет условиям «центральности», значит, найденные точки – действительно центральные.

Список литературы:

1. А. Г. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. Библиотека «Математическое просвещение», Вып.19. -М.:МЦНМО, 2002.
2. <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Дичина Регина

10 класс, МБОУ Лицей № 3, г. Саров, Нижегородская обл.

Научный руководитель: Столяров Игорь Васильевич, учитель математики и информатики, МБОУ Лицей № 3

Цель:

В данной работе рассматриваются особенности применения метода математической индукции при доказательстве ряда теорем в теории чисел Фибоначчи.

Значимость и новизна:

Новизна данного исследования заключается в том, что при доказательстве данных теорем был использован множественный подход с разбиением на

подмножества и многократное использование метода математической индукции, что существенным образом отличается от существующих способов применения метода математической индукции.

Краткое описание научно-исследовательской работы:

С применением метода математической индукции на основании рекуррентных соотношений, связывающих каждые три соседних числа Фибоначчи и симметричные гиперболические функции Фибоначчи, в данной работе были доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Все числа ряда Фибоначчи лежат в проекции Золотого Шофара на плоскости XOY .

Для доказательства теоремы 1 все множество чисел Фибоначчи было разбито на четыре подмножества: четные числа Фибоначчи (симметричный синус Фибоначчи $sFs(x)$), нечетные числа Фибоначчи (симметричный косинус Фибоначчи $cFs(x)$), четные расширенные и нечетные расширенные числа Фибоначчи в сторону отрицательных значений индекса n . Для каждого из множеств по методу математической индукции (с переходом к натуральному индексу) на основании рекуррентных соотношений были доказаны соответствующие равенства, связывающие каждые три соседних числа Фибоначчи.

Теорема 2. Трехмерная спираль Фибоначчи лежит на Золотом Шофаре, в плоскости XOY она проецируется в квази-синусоидальную функцию Фибоначчи и пересекает плоскость XOY в точках, которые соответствуют числам Фибоначчи.

Особенности применения метода математической индукции при доказательстве теоремы 2 заключаются в том, что для комплексного представления трехмерной спирали Фибоначчи были отдельно доказаны соответствующие соотношения для действительной и мнимой части.

Развитие нового («непрерывного») подхода к «Теории чисел Фибоначчи» состоит в том, что она является вырожденным, «дискретным» случаем «теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка», а любому «непрерывному» тождеству для гиперболических функций Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка и наоборот.

Вывод:

В данной работе были рассмотрены особенности применения метода математической индукции при доказательстве ряда теорем в теории чисел Фибоначчи.

Список литературы:

1. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar // Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Volume 26, Issue 3, p. 677-684.
2. Stakhov A., Rozin B. On a new class of hyperbolic function // Chaos, Solitons & Fractals, 2004, Volume 23, Issue 2, p. 379-389.
3. Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: A New Mathematics for the Living Nature. — Vinnitsa: ITI, 2003. – 240 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МИНИАТЮРЫ

Гуриносова Ольга

9 класс, ГУО Гимназия №1, г. Витебск, Беларусь

Научный руководитель: Наумик Михаил Иванович, УО Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, к. ф.-м. н., доцент

Рассмотрим задачу, которая была предложена на белорусском математическом бое в декабре 2015 года.

Зафиксируем на плоскости треугольник ABC .

1. Обозначим через SL , SM , SK площади треугольников, вершинами которых являются, соответственно, основания биссектрис, медиан и точки касания вписанной окружности данного треугольника ABC . Доказать, что $SK \leq SL \leq SM$.

2. Для точки X , находящейся внутри треугольника ABC , рассмотрим треугольник TX , вершинами которого являются точки пересечения прямых AX , BX , CX с прямыми BC , AC , AB соответственно.

2.1. Найдем положение точки X , для которого площадь треугольника TX будет наибольшей.

2.2. Предлагаем эффективный критерий сравнения между собой площадей треугольников TX для разных положений точки X .

2.3. Найдем положения точки X , для которых периметр треугольника TX является наименьшим и наибольшим.

2.4. Предлагаем эффективный критерий сравнения между собой периметров треугольников TX для различных положений точки X .

2.5. Предлагаем и решаем аналогичные задачи для экстремальных значений других параметров (например, радиуса вписанной окружности, длины наибольшей высоты) треугольников TX .

3. Для точки Y , находящейся внутри окружности ω , описанной около треугольника ABC , рассмотрим треугольник ΔY , вершинами которого являются точки пересечения прямых AY , BY , CY с окружностью ω . Предлагаем

и решаем аналогичные задачи для треугольников ΔY для различных положений точки Y .

4. Предлагаем и решаем аналогичные задачи для выпуклых многоугольников.

5. Для точки Z , находящейся внутри окружности ω , описанной около треугольника ABC , рассмотрим треугольник FZ , вершинами которого являются ортогональные проекции точки Z на прямые BC, AC, AB . Предлагаем и решаем аналогичные задачи для треугольников FZ для различных положений точки Z .

FRACTALS IN THAI CULTURE

Wipasinee Sirintronsopon and Tanaorn Bamroongshawgasame
*Kamnoetvidya Science Academy, 999 Moo. 1, Payupnai, Wangchan,
Rayong 21210, Thailand*

Science Advisor: Art Gorka, Ph.D.

A fractal is a geometric shape, a never-ending pattern of high complexity with property of self-similarity at many levels, generated by iterations of simple equations or figures. They started to be studied just a few decades ago to describe chaos by using equations and graphs but quickly sprung out from classrooms to everyday life and became a fashionable subject of its own used in pop culture, graphics, and arts. Many fractals include repetition of triangular- or rectangular- or some other geometric shapes. In this project we try to showcase the beauty of traditional Thai Culture Designs and point out their fractal-like structure that can be found in typical Thai designs hundreds of years old, long before even the first fractal was defined. We look at many examples of buildings, temples, pagodas, stupas, chats-umbrellas, shrines, sculptures, paintings, ornaments etc., explain the patterns of those designs and identify a few types of fractals commonly found in those places. We classify them and describe their shapes, level of self-similarity, and complexity. Some of these designs have been defined mathematically by finding a generator for a simple iterative process.

ЧАСТИЦЫ

Василевская Яна

10 класс, ГУО Гимназия №1, г. Витебск, Беларусь

Научный руководитель: Наумик Михаил Иванович, УО Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, к. ф.-м. н., доцент

Исследуемая нами задача была предложена на XVII Белорусском Республиканском конкурсе (турнире) юных математиков, проведённом в декабре 2015 года. На данном турнире командами не было приведено полного решения всех пунктов.

На оси Ox находятся несколько частиц. Каждую секунду каждая частица делится на 2 равные части (каждая по массе равна исходной), первая часть располагается на 1 левее соответствующей частицы, а вторая – на 1 правее. Если в одну точку попадают две частицы, то их массы складываются.

I. Допустим, что в начальный момент времени на оси находится только одна частица массы 1 в точке m (здесь и далее все значения точек целые).

1) Найти массу, которая будет находиться в точке k через n секунд (рассмотрите все точки, в которых окажется ненулевая масса).

I.1. Ответ: $C_n^{\frac{k-m+n}{2}}$.

2) Как изменится ответ, если в точке 0 находится поглощающий экран, т.е. все частицы, попавшие в эту точку, уничтожаются?

I.2. Ответ: $C_n^{\frac{k-m+n}{2}} - C_n^{\frac{-k-m+n}{2}}$.

3) Как изменится ответ, если в точке 0 находится отражающий экран, т.е. частица, попавшая в 0, на следующем шаге не делится, а попадает в точку 1?

I.3. Ответ: $C_n^{\frac{k-m+n}{2}} - C_n^{\frac{-k-2-m+n}{2}}$.

4) Как изменится ответ, если в точке 0 находится полупрозрачная мембрана: частица, попавшая в 0, делится на две в пропорции $p : q$, первая попадает в -1 , а вторая в 1?

I.4. Ответ: 1) k и m разных знаков, то $C_n^{\frac{k-m+n}{2}} \times (2 - \frac{p}{p+q})$ (при $m > 0$ p заменяется на q и наоборот);

2) если k и m одного знака, то $\frac{p}{p+q} \times C_n^{\frac{k-m+n}{2}}$.

5) Что происходит, если на каждом шаге частица делится не на равные части, а на части, массы которых слева и справа равны соответственно s и t ? Тот же вопрос, если массы частиц изменяются по некоторому рекуррентному закону.

I.5. Ответ: $C_n^{\frac{k-m+n}{2}} \cdot s^{\frac{n-(k-m)}{2}} \cdot t^{\frac{k-m+n}{2}}$.

II. Предложите и исследуйте аналогичные модели с двумя (или более) исходными частицами, либо двумерные аналоги этих моделей.

II. В начальный момент времени на плоскости Oxy в точке $M(m_x; m_y)$ находится частица массой 1. Каждую секунду она делится на 4 частицы (каждая по массе равна исходной), которые попадают в точки (m_{x+1}, m_y) , (m_x, m_{y+1}) , (m_{x-1}, m_y) , (m_x, m_{y-1}) . Найти массу, которая окажется в точке $K(k_x, k_y)$ через n секунд.

Ответ: $C_n^{\frac{k_x - k_y - m_x + m_y + n}{2}} \times C_n^{\frac{m_x + m_y - k_x - k_y + n}{2}}$.

ПОСТРОЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЯПОНСКОЙ ХРАМОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Левин Лев, Чарзавакян Михаил

10 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Владимир Натанович Дубровский,
доцент кафедры математики СУНЦ МГУ, к. ф.-м. н.

С 17 века в Японии возникла традиция вывешивать в храмах дощечки с математическими, прежде всего геометрическими, задачами, называемыми «сангаку». В остальном мире сангаку оставались малоизвестными до недавнего времени. Во многих из этих задач рассматриваются довольно сложные конфигурации, поэтому не только доказательство их свойств, но и построение циркулем и линейкой чертежей к ним является содержательной задачей. Мы выбрали несколько наиболее интересных для нас в этом смысле сангаку и поставили целью построить чертежи к ним. Основным методом наших построений был метод инверсии. Найденные построения, как правило, подсказывают и путь решения исходных задач. Построения выполнялись с помощью программы "1С:Математический конструктор", которая позволяет получить динамическую модель, отображающую сразу все семейство чертежей, отвечающих разным возможным значениям данных задачи.

В результате нашего исследования мы полностью решили поставленные перед нами задачи, попутно доказав несколько интересных фактов.

Список литературы:

1. А.В. Карлюченко, О.А. Карлюченко. Сангаку. Японская храмовая геометрия. Киев, 2012.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ПО ЕГО КОЭФФИЦИЕНТАМ

Данилов Дмитрий

10 класс, МБОУ «Физико-математический лицей», г. Сергиев Посад

Научный руководитель: Забавин Валерий Николаевич, д. ф.-м. н.

В книге [1] поставлена такая задача: исследовать количество корней уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ в зависимости от a, b, c ; изобразить соответствующие области в пространстве параметров (a, b, c) . Цель нашей работы – привести уравнение четвертой степени к виду, содержащему два коэффициента, и изобразить на плоскости этих коэффициентов области, в которых уравнение имеет данное количество действительных корней.

Уравнение $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ заменой неизвестной сводится к одному из трех видов: $x^4 = px + q$; $x^4 + x^2 = px + q$; $x^4 - x^2 = px + q$, где коэффициенты p, q выражаются через коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 исходного уравнения. Для каждого из них на плоскости (p, q) указаны области, в которых уравнение имеет данное количество решений. Поставленная цель достигнута.

Список литературы:

1. Сгибнев А.Н. Исследовательские задачи для начинающих. – М.: МЦНМО, 2013.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА-ТОРРИЧЕЛЛИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

Гаврин Иван

9 класс, МБОУ «Гимназия №127», г. Снежинск, Челябинская обл.

Научные руководители: Руданова Наталья Юрьевна, учитель математики МБОУ «Гимназия №127», Шальнов Сергей Александрович, инженер-технолог ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ им. академика Забабахина

Достаточно широкое практическое применение некоторых свойств точки Ферма-Торричелли в транспортной логистике, строительстве и многих других сферах обусловлено экономическим эффектом. При этом все рассмотренные мною примеры касались стационарных объектов. Задавшись целью применить эти замечательные свойства, для движущихся объектов была придумана

задача: «Группа небольших кораблей-сейнеров ведет промысловый лов рыбы, перемещаясь с одинаковой скоростью в различных заданных направлениях. Между ними находится большой корабль-база, куда периодически выгружают свою добычу рыбаки. Определить траектории движения корабля-базы при заданных перемещениях сейнеров в процессе лова, обеспечивающих минимальное суммарное перемещение сейнеров для выгрузки улова». Условие задачи неполное.

Цель работы: исследование поведения точки Ферма-Торричелли при заданном изменении положений вершин исходного треугольника. Показать графически линии, по которым перемещается точка Ферма-Торричелли при различных направлениях перемещения вершин исходного треугольника (траектории движения корабля-базы).

Исследование проводилось методом графических построений и расчетов координат точек и длин отрезков по формулам аналитической геометрии.

Координаты точек вершин треугольника считаем известными: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

В результате проведенных исследований искомые траектории построены. Их анализ позволяет утверждать, что:

1. перемещение точки Ферма-Торричелли (корабля-базы) будет равно по величине и направлению перемещению вершин треугольников (кораблей-сейнеров) только в одном случае: если они движутся в одном направлении, параллельно друг другу;

2. существует единственное условие перемещения вершин треугольников (кораблей-сейнеров), при котором точка Ферма-Торричелли (корабль-база) остается неподвижной.

Список литературы:

1. В.В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. –М.: МЦНМО, 2011.
2. В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Часть 1. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991 г.
3. Радзивилловский Л. О точке Торричелли // Научно-популярный физико-математический журнал “Квант” №3, 2014.

МАТЕМАТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Пашинцева Елена

11 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова МГУ имени М.В. Ломоносова

В работе рассматриваются задачи на вычисление сопротивлений электрических цепей, измеряемых между некоторыми двумя её узлами, и которые иллюстрируют мощь и красоту взаимодействия математических и физических методов исследований в данных задачах.

Работу можно разделить на две части.

В первой из них рассматривается задача о разбиения данного прямоугольника на квадраты, в которой из физических соображений (сопоставления такому разбиению электрической цепи из резисторов с единичными сопротивлениями) доказывается теорема Дена: Если прямоугольник можно разрезать на квадраты (необязательно равные), то отношение длин его сторон рационально. Здесь же приведен один из возможных способов разбиения данного прямоугольника на квадраты (и построения соответствующей электрической цепи), в основе которого лежит алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Приведены примеры, когда алгоритм Евклида приводит к конструкции электрических цепей, составленных из единичных сопротивлений (при заданном общем её сопротивлении), не обладающих свойством минимальности количества необходимых сопротивлений.

Во второй части работы рассматриваются электрические цепи на графах. В качестве основных примеров фигурируют графы, отвечающие правильным многогранникам; предполагается, что все ребра таких графов имеют единичные сопротивления. Вычислены полные сопротивления этих цепей, измеряемых для противоположных вершин таких графов ($5/6$ (куб), $1/2$ (октаэдр), $7/6$ (додекаэдр), $1/2$ (икосаэдр)) и полные сопротивления цепей, измеряемых между соседними их вершинами (тетраэдр- $1/2$, октаэдр- $5/12$, икосаэдр- $11/30$, куб- $7/12$, додекаэдр- $19/30$). Доказанная в этой же части работы теорема Фостера для графов более общей структуры, позволяет находить полные сопротивления между соседними вершинами соответствующих им электрических цепей; так, например, для так называемого графа Дойля такое сопротивление равно $26/63$.

Автор благодарит В.В. Вавилова за постановку задач и помощь в работе.

Список литературы:

1. В.В. Вавилов, А.В. Устинов, Задачи на клетчатой бумаге, -М.: СУНЦ МГУ, -72.с.
2. В.В. Вавилов, Арифметика электрических цепей, - Потенциал, №2, 2009, 30 -32.
3. М.Б. Скопенков, А.А. Пахарев, А.В. Устинов, Сквозь сеть сопротивлений, Матем. просв., сер. 3, вып.18, 2014, 33-65.
4. Г.А. Гальперин, Мой друг Андрей Ходулёв, Матем. просв., сер.3, вып.4, 2000, 8–32.
5. М.Прасолов, М.Скопенков, С.Дориченко, Разрезания металлического прямоугольника, -Квант, №3, 2011, 10 -16.
6. Д. Баранов, М. Скопенков, А.В. Устинов, Сопротивление между узлами решетки, Матем. просв., сер. 3, вып. 15, 2011, 229–230

Отпечатано 21 апреля 2016 года.
Издательский центр СУНЦ МГУ,
г. Москва, ул. Кременчугская, д.11, 107-Б.