

**IX командно-личный турнир  
«Математическое многоборье»**

*31 октября – 5 ноября 2016 года, г. Москва*

**Командная устная олимпиада  
Старшая лига 10-11классы**

1. В треугольнике  $ABC$  с углом  $\alpha = 15^\circ$  и неизвестными длинами сторон  $a, b, c$  выполняется соотношение  $b = \sqrt{a(a+c)}$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ , если радиус вписанной окружности  $r = 1$ . Ответ представить в виде суммы чисел.

2. При моделировании развития некоторого процесса во времени  $t$  физик вывел зависимость  $y_1(t) = 2^{-4t}$ , а механик для того же процесса получил зависимость  $y_2(t)$ , которая оказалась обратной функцией к  $y_1(t)$ . Начавшийся научный спор прекратил математик, который доказал, что обе эти зависимости в некотором интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$  достаточно близки к гиперболической функции  $y_3(t) = \frac{c}{t}$ , где  $c$  – некоторая постоянная, а уравнения  $y_1 = y_3$  и  $y_2 = y_3$  в этом интервале времен имеют по два точных решения, которые, если знать  $c$ , легко угадываются.

1) Надо найти это значение  $c$  и минимальный интервал  $[t_1, t_2]$ , где справедливо утверждение математика.

2) Определить, сколько точных решений имеет уравнение  $y_1 = y_2$ .

3. Из листа жести площадью  $2a^2$  требуется изготовить закрытую коробку в форме параллелепипеда с максимальным объемом  $V_m = \max V$ .

1) Каковы размеры ребер такой коробки? Жесть можно гнуть по прямым линиям и резать, но нельзя соединять (склеивать или сваривать) различные части разрезанного листа.

2) Тот же вопрос про  $\max V$  и длины ребер для открытой коробки (без крышки) из прямоугольного листа жести размером  $b$  на  $c$ . Найти  $\max V$  при заданном периметре этого листа.

4. При каких значениях параметра  $a$  (в сантиметрах) геометрическое место точек координатной плоскости  $(x, y)$ , удовлетворяющие уравнению

$(|x - 2a| + |x + 2a| + |2y - a| + |2y + a|) \text{ см} = a^2 - 7 \text{ см}^2$ , содержит ромб максимальной площади?

Может ли площадь  $S$  этого ромба быть больше  $100 \text{ см}^2$ ? Если это возможно, то указать длины диагоналей такого ромба; если нет – обосновать ответ.

5. Найти любой многочлен третьей степени вида  $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , для которого при  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  выполняется неравенство

$$\left| P_3(x) - \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \right| < \frac{1}{75}$$

6. Радиолокационная станция (РЛС) при круговом обзоре обнаружила неопознанный летающий объект (НЛО), неподвижно зависший над горизонтом и задаваемый на карте местности множеством  $25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 \leq 0$ . Найти крайние азимуты НЛО, т.е. внутри какого угла с вершиной в начале координат (место положение РЛС) находится этот объект, дающий засветку на экранах кругового обзора. Оценить  $\min R$  – минимальное расстояние НЛО от РЛС. Может ли  $R$  быть меньше  $0,5$  условных единиц длины?

7. Тройки чисел  $x, y, z$  и  $a, b, c$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 20 \\ 9a^2 + b^2 + 3c^2 = 25 \end{cases}$$

В каких пределах может изменяться выражение  $2cx - 2ay + bz$ ?