IX командно-личный турнир
«Математическое многоборье»

31 октября – 5 ноября 2016 года, г. Москва

Командная устная олимпиада
Младшая лига 8-9классы

1. Известно, что

$$\begin{cases} x-y>97, \\ x^2-\dfrac{1}{y+\frac{1}{x}}>2, \\ x+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x+57y}=2016. \end{cases}$$

Верно ли, что $\frac{x+2\frac{y}{z}}{\frac{1}{y+\frac{1}{x}}+(x-y)}>95$?

2. Вася и Лёша написали наборы целых чисел. Вася написал все наборы чисел длины n с элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ такими, что $|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n| \leq k$. Лёша написал все наборы чисел длины k с элементами $b_1, b_2, \dots, b_k$ такими, что $|b_1|+|b_2|+\dots+|b_n| \leq n$. Докажите, что Лёша и Вася написали одинаковое число наборов.

3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ – попарно различные подмножества множества $\{1,2,\dots,n\}$. Определите максимум величины

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{A_i \cap A_{i+1}}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|},$$

при условии, что $A_{2n+1}=A_1$.

4. Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c, если известно, что медиана, проведённая к c, есть среднее геометрическое его катетов.

5. В зале находятся 100 человек, каждый из которых знаком по крайней мере с 67 из остальных присутствующих. Можно ли утверждать, что в зале непременно найдутся четыре человека, из которых любые два знакомы друг с другом? Считаем, что если А знает В, то и В знает А.

6. Квадратная таблица, содержащая n строк и n столбцов (n-нечетное число), заполнена числами $1,2,\dots,n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа. Кроме того, таблица заполнена симметрично относительно одной своей диагонали. Верно ли, что на этой диагонали встречаются все числа от 1 до n?

7. Пусть m, n, p, l - натуральные числа. Если у следующей системы:

$$\begin{cases} np^2+ml^2 \leq 23456, \\ mn+p^7l=1626, \\ m(l+1)^p+npl=2197+m, \end{cases}$$

есть решения, то предъявить то из них, для которого сумма $m+n+p+l$ минимальна. Иначе - доказать, что решений нет.

8. Доказать, что если натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^n+y^n=z^n,$$

то $\min(x,y) \geq n$. **(Ссылаться на великую теорему Ферма запрещено.)**

9. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC - в точке F. Биссектриса угла AEC пересекает сторону BC в точке M и сторону AD в точке N, а биссектриса угла BFD пересекает сторону AB в точке P и сторону CD в точке Q. Доказать, что четырехугольник $MPNQ$ - ромб.