IX командно-личный турнир
«Математическое многоборье»

31 октября – 5 ноября 2016 года, г. Москва

Командная устная олимпиада (условия и решения)
Старшая лига 10-11классы

1. (10 баллов) В треугольнике ABC с углом $\alpha = 15°$ и неизвестными длинами сторон a,b,c выполняется соотношение $b = \sqrt{a(a+c)}$. Найти площадь треугольника ABC, если радиус вписанной окружности $r = 1$. Ответ представить в виде суммы чисел.

Решение.

$b = \sqrt{a(a+c)} \Leftrightarrow b^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow b^2 - a^2 = ac \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sin^2\beta - sin^2\alpha = sin\alpha \cdot sin\gamma \quad (1)$

Последний переход справедлив по теореме синусов: $a = 2Rsin\alpha$, $b = 2Rsin\beta$, $c = 2Rsin\gamma$.

$(1) \Leftrightarrow (sin\beta + sin\alpha)(sin\beta - sin\alpha) = sin\alpha \cdot sin[\pi - (\alpha + \beta)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2sin\frac{\beta+\alpha}{2}cos\frac{\beta-\alpha}{2}2sin\frac{\beta-\alpha}{2}cos\frac{\beta+\alpha}{2} = sin\alpha \cdot sin(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sin(\alpha+\beta)sin(\beta-\alpha) = sin\alpha \cdot sin(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sin(\alpha+\beta)[sin(\beta-\alpha) - sin\alpha] = 0 \Leftrightarrow sin(\alpha+\beta)sin\frac{\beta-2\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sin(\alpha+\beta) = 0 \\ sin\frac{\beta-2\alpha}{2} = 0 \\ cos\frac{\beta}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha+\beta = \pi n, n \in \boldsymbol{Z} \\ \beta - 2\alpha = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z} \\ \beta = \pi + 2\pi m, m \in \boldsymbol{Z} \end{array}\right.$$

Из полученных вариантов в треугольнике возможно только $\beta = 2\alpha$, при $k = 0$.

Из условия $\alpha = 15°$ получаем $\beta = 30°$, $\gamma = 135°$.

Тогда в треугольнике ABC получаем

$a = 2Rsin15° = \frac{1}{2}R(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $b = 2Rsin30° = R$;

$c = 2Rsin(90° + 45°) = 2Rcos45° = R\sqrt{2}$;

Причем $sin(15°) = sin(45° - 30°)$ честно подсчитан или через половинный угол.

$p = R\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot sin\beta = p \cdot r \Leftrightarrow \frac{1}{4}R^2\left(2\sqrt{3} - 2\right) = \frac{1}{4}R\left(2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = \frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-2}$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot sin\beta = \frac{1}{4}R^2\left(2\sqrt{3} - 2\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(2+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{3}-2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

2. (10 баллов) При моделировании развития некоторого процесса во времени t физик вывел зависимость $y_1(t) = 2^{-4t}$, а механик для того же процесса получил зависимость $y_2(t)$, которая оказалась обратной функцией к $y_1(t)$. Начавшийся научный спор прекратил математик, который доказал, что обе эти зависимости в некотором интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ достаточно близки к гиперболической функции $y_3(t) = \frac{c}{t}$, где c – некоторая постоянная, а уравнения $y_1 = y_3$ и $y_2 = y_3$ в этом интервале времен имеют по два точных решения, которые, если знать c, легко угадываются.

1) Надо найти это значение c и минимальный интервал $[t_1, t_2]$, где справедливо утверждение математика.
2) Определить, сколько точных решений имеет уравнение $y_1 = y_2$.

<u>Решение.</u>

$y_1(t) = 2^{-4t} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^t = \left(\frac{1}{16}\right)^t$

$y_2(t) = log_{\frac{1}{16}} t$

$y_1 = y_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^t = log_{\frac{1}{16}} t \qquad (1)$

Поскольку в уравнении (1) участвуют взаимообратные функции, то оно обязано иметь решение на биссектрисе первой четверти $t_* = y_*$.

Однако легко проверяется (“угадайка”, которая бросается в глаза), что уравнение (1) имеет ещё два решения:

При $t_1 = \frac{1}{4}$ поскольку $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

При $t_2 = \frac{1}{2}$ поскольку $\sqrt{\frac{1}{16}} = log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Константа c в $y_3(t)$ восстанавливается для этих симметричных решений $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$y_3(t) \cdot t = \frac{1}{8} = c$

Из угаданных решений понятно, что $\min[t_1, t_2] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

<u>Ответ:</u> 1) $c = \frac{1}{8}$; $[t_1, t_2] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$; 2)3 решения (доказанное t_* и угаданные $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{1}{2}$).

3. (10 баллов) Из листа жести площадью $2a^2$ требуется изготовить закрытую коробку в форме параллелепипеда с максимальным объемом $V_m = maxV$.

1) Каковы размеры ребер такой коробки? Жесть можно гнуть по прямым линиям и резать, но нельзя соединять (склеивать или сваривать) различные части разрезанного листа.
2) Тот же вопрос про $maxV$ и длины ребер для открытой коробки (без крышки) из прямоугольного листа жести размером b на c. Найти $maxV$ при заданном периметре этого листа.

<u>Решение.</u>

Пусть x, y, z, – ребра искомого прямоугольного параллелепипеда, тогда $V = xyz$, а площадь его поверхности $S = 2(xy + xz + yz) = 2a^2$. Надо найти $maxV = \max(xyz)$ при условии $xy + xz + yz = a^2 = const$, но $maxV$ реализуется при $maxV^2 = \max(xyz)^2 =$
$= \max[(xy)\,(xz)(yz)]$ и условии, что $xy + xz + yz = a^2$. Тогда есть система

$$\begin{cases} \max[(xy)\,(xz)(yz)] = ? \\ xy + xz + yz = a^2 \end{cases}$$

По теореме о средних (арифметическом и геометрическом) для трех чисел

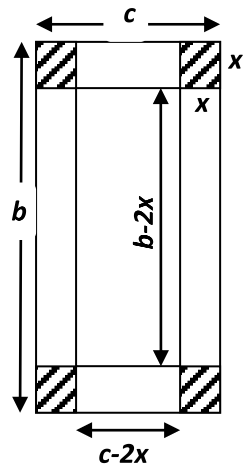
$maxV^2 = \max(xyz)^2 = = \max[(xy)\,(xz)(yz)]$ достигается при условии $xy = xz = yz = \frac{a^2}{3}$

$x = y = z = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Однако свернуть такой кубик можно только при условии, что исходный лист жести имеет форму развертки куба в виде «креста» 4х3 или буквы Т.

Если $h = x$ – высота открытой коробки, то площадь дна (см. рисунок)

вычисляется по формуле $S = (b-2x)(c-2x) = 4x^2 - 2(b+c)x + bc$.
Следовательно, ее объем $V = S \cdot h = x[4x^2 - 2(b+c)x + bc]$,
а необходимое условие $maxV$ получается из производной
$V' = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 4(b+c)x + bc = 0$ (1)
Критические точки получаем из уравнения (1):
$x_{1,2} = \frac{b+c\pm\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6}$ и, обосновав выбор знака,
при $h = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6}$ будет $maxV$ открытой коробки.
Длины ребер *h, b-2h, c-2h.*
Если периметр исходного листа жести $2(b+c) = const$, тогда
$h = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6} \le \frac{b+c-\sqrt{bc}}{6} = \frac{b}{6}$.
Последний переход справедлив по теореме о средних:
$\frac{b^2+c^2}{2} \ge \sqrt{bc} \Leftrightarrow b^2 + c^2 \ge 2bc$, причем знак «=» при $b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$.



Следовательно, получаем длины ребер коробки:
$$\begin{cases} h = \frac{b}{6} \\ b - 2h = \frac{2b}{3} \Leftrightarrow V_{max} = \frac{2b^3}{27} \\ c - 2h = \frac{2b}{3} \end{cases}$$
<u>Ответ:</u> 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 2) $h = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6}$; *b-2h*; *c-2h*; $V_{max} = \frac{2b^3}{27}$.

4. (10 баллов) При каких значениях параметра a (в сантиметрах) геометрическое место точек координатной плоскости *(x, y)*, удовлетворяющие уравнению
$(|x-2a| + |x+2a| + |2y-a| + |2y+a|)\text{см} = a^2 - 7\text{см}^2$,
содержит ромб максимальной площади?
Может ли площадь *S* этого ромба быть больше 100см^2? Если это возможно, то указать длины диагоналей такого ромба; если нет – обосновать ответ.

<u>Решение.</u>
Исходное уравнение четно по переменным x и y и параметру $a \Rightarrow$ искомое ГМТ симметрично относительно осей x, y и можно считать *a>0.*
В области, задаваемой системой неравенств
$\begin{cases} 0 \le x \le 2a \\ 0 \le y \le \frac{a}{2} \end{cases}$ исходное уравнение равносильно $a^2 - 6a - 7 = 0$, $a_{1,2} = -1$ v 7.
Следовательно, необходимые условия для параметра $a = \pm1;\ \pm7$.
Однако, пара $a = \pm1$ при подстановке в исходные уравнения дает $x, y\ \in \emptyset$.
В других трех областях первой четверти ГМТ не может содержать произвольную фигуру с площадью *S>0.*

При *a=7* получаем общее ГМТ в виде прямоугольника с размером 28 по оси *Ox* и 7 по оси *Oy*, в который можно вписать ромб. Площадь этого ромба с диагоналями $d_1 = 28, d_2 = 7$ по координатным осям вычисляется по формуле:
$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 98\text{см}^2$.
Если большую диагональ ромба $d_1 = 28$ развернуть и растянуть по диагонали прямоугольника до $d_1^* = 7\sqrt{17}$ (при этом повернется и меньшая диагональ $d_2 = 7$, но ее можно и не растягивать!),
то у такого ромба $S^* = \frac{1}{2}d_1^* d_2 = \frac{49\sqrt{17}}{2} > 101\ \text{см}^2$.
Т.к. исходное уравнение четно по a, ответом будет и $a = -7$.

<u>Ответ:</u> $a = \pm 7$ см; может d=$7\sqrt{17}$ и 7.

5. (7 баллов) Найти любой многочлен третей степени вида $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, для которого при $0 \le x \le \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$\left|P_3(x) - \frac{x}{1-\frac{x}{2}}\right| < \frac{1}{75}$$

<u>Решение.</u>

$S(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \cdots$

Это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

с $a_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{x}{2} \in (0; \frac{1}{4}]$.

Поэтому

$xS(x) = \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \cdots\right) =$

$= \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^4}{8\left(1-\frac{x}{2}\right)}$

Если в $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принять значения

$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = 1, d = 0$, то

$\left|P_3(x) - \frac{x}{1-\frac{x}{2}}\right| = |P_3(x) - xS(x)| = \frac{x^4}{8\left(1-\frac{x}{2}\right)} \le \frac{1}{3 \cdot 2^5} = \frac{1}{96} < \frac{1}{75}$

<u>Ответ:</u> $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = 1, d = 0$

6. (7 баллов) Радиолокационная станция (РЛС) при круговом обзоре обнаружила неопознанный летающий объект (НЛО), неподвижно зависший над горизонтом и задаваемый на карте местности множеством $25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 \le 0$. Найти крайние азимуты НЛО, т.е. внутри какого угла с вершиной в начале координат (место положение РЛС) находится этот объект, дающий засветку на экранах кругового обзора. Оценить $minR$ – минимальное расстояние НЛО от РЛС. Может ли R быть меньше 0,5 условных единиц длины?

<u>Решение.</u>

НЛО, задаваемое на карте неравенством $25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 \le 0$, (1) находится в какой то одной четверти, т.к. не пересекается с осями координат.

При $x = 0$ из (1) получаем $y^2 + 2y + 3 > 0$ для любых y.

При $y = 0$ из (1) получаем $25x^2 + 16x + 3 > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Кратчайшие азимуты находятся из системы

$$\begin{cases} 25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 = 0 \\ y = kx \end{cases} \quad (2)$$

когда она имеет единственное решение:

$(k^2 + k + 25)x^2 + 2(k + 8)x + 3 = 0$ (3)

$D = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 13k + 11 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{13 \pm 9}{4} = 1$ v $\frac{11}{2}$

Тогда НЛО, очевидно, не может находиться во второй и четвертой четвертях, т.к. при $x \ge 0, y \ge 0$ не выполняется неравенство (1).

Следовательно НЛО находится в третей четверти между углами (крайними азимутами)

$\alpha_1 = \pi + arctg\frac{11}{2}$

$\alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$

Следовательно, из начала координат НЛО виден под углом

$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = arctg\frac{11}{2} - arctg\frac{\pi}{4}$

При *k=1* уравнение (3) эквивалентно $27x^2 + 18x + 3 = 0$, $x = -\frac{1}{3}$.

Тогда $y = kx = -\frac{1}{3}$.

Поэтому $minR \le \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47 < 0.5$

Другие оценки *minR* (например, при *k=2* или *k=3*) будут хуже.

7. (6 баллов) Тройки чисел x, y, z и a, b, c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 20 \\ 9a^2 + b^2 + 3c^2 = 25 \end{cases}$$

В каких пределах может изменяться выражение *2cx-2ay+bz*?

Решение:

Если рассматривать уравнение системы на языке векторной алгебры, то выражение $12x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 20$ соответствует

$$\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{12x^2 + 4y^2 + 9z^2} = 2\sqrt{5} \\ \vec{u} = \{2\sqrt{3}x; 2y; 3z\} \end{cases}$$

Выражение $9a^2 + b^2 + 3c^2 = 25$ соответствует

$$\begin{cases} |\vec{v}| = \sqrt{9a^2 + b^2 + 3c^2} = 5 \\ \vec{v} = \{\sqrt{3}c; -3a; b\} \end{cases}$$

А тогда скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равно $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| cos\varphi = 6cx - 6ay + 3bz = 3(2cx - 2ay + bz)$

Так как $cos\varphi \in [-1, 1]$, то $2cx - 2ay + bz = \frac{1}{3}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{10}{3}\sqrt{5}cos\varphi$.

Ответ: $[-\frac{10}{3}\sqrt{5}; \frac{10}{3}\sqrt{5}]$