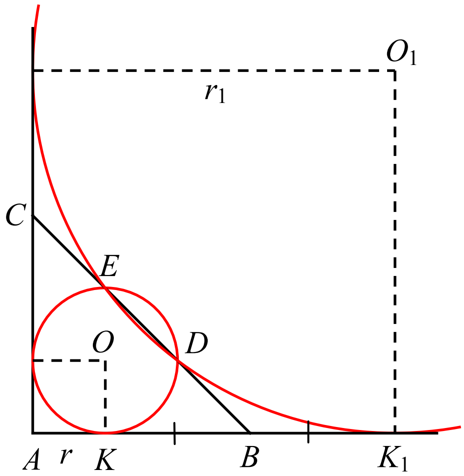
**IX командно-личный турнир «Математическое многоборье»**

***31 октября – 5 ноября 2016 года, г. Москва***

# Геометрия (решения)

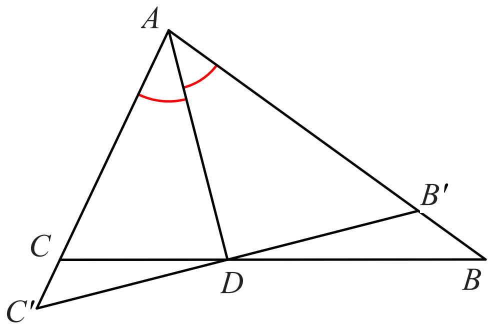
## Старшая лига

1. Окружность, вписанная в прямой угол равнобедренного прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на 3 равные части. Найдите радиус окружности, если катет треугольника равен 1.



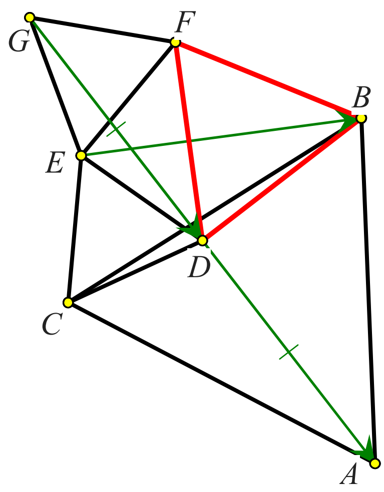

*Ответ*: 1/3 или 5/3.
*Решение*. Очевидно, что радиус окружности, вписанной в прямой угол $A$, равен расстоянию от его вершины до точки касания окружности со стороной. Пусть $BC$, гипотенуза данного треугольника $ABC$, пересекается с окружностью в точках $D$ и $E$, $K$ – точка касания с прямой $AB$ (см. рисунок). По теореме о квадрате касательной $BK^2 = BD \cdot BE = (2/9)BC^2 = 4/9$, т.е. $BK = 2/3$.
Если точка касания лежит на катете $AB$ (точка $K$ на рисунке), то искомый радиус $r = AK = 1 – BK = 1/3$.
Если же точка касания лежит на продолжении катета $AB$ (точка $K_1$ на рисунке), то искомый радиус $r_1 = AK_1 = 1+BK_1 = 5/3$.

2. Длины биссектрис треугольника не меньше 1. Докажите, что его площадь не меньше $\sqrt{3}/3$.



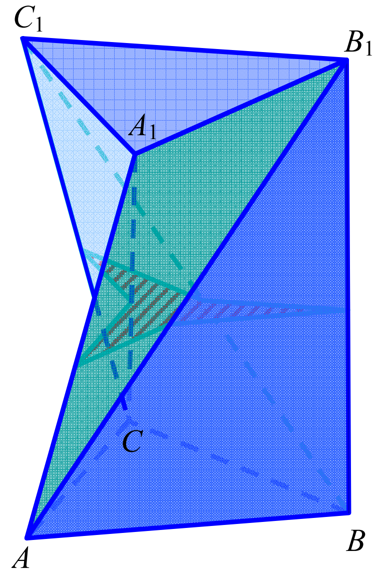

*Решение*. Пусть угол $A$ – наибольший в треугольнике $ABC$, $AD$ – его биссектриса и пусть $AB \geq AC$. Прямая, проходящая через $D$ перпендикулярно $AD$, отсекает от угла равнобедренный треугольник $AB'C'$ (его вершину, лежащую на стороне $AB$, обозначим через $B'$). Используя свойство биссектрисы треугольника, получаем:
$$\frac{S_{DBB'}}{S_{DCC'}} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{DB'}{DC'} = \frac{AB}{AC} \cdot 1 \geq 1.$$
Поэтому
$S_{ABC} = S_{AB'C'} + S_{DBB'} - S_{DCC'} \geq S_{AB'C'} = AD^2 \operatorname{tg} A/2 \geq \sqrt{3}/3$, т.к. $AD \geq 1$, а $\angle A \geq 60°$.

3. Цепочка из трех правильных треугольников $ABC$, $CDE$ и $EFG$, вершины которых перечислены против часовой стрелки, расположена так, что $D$ – середина $AG$. Докажите, что треугольник $BFD$ – тоже правильный.




*Решение*. При повороте на 60° вокруг $C$, переводящем $A$ в $B$, точка $D$ переходит в $E$, т.е. вектор $\overrightarrow{DA}$ переходит в $\overrightarrow{EB}$. Рассмотрим поворот на 60° вокруг $F$ в том же направлении. Он переводит вектор $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DA}$ в вектор, равный $\overrightarrow{EB}$, а точку $G$ – в $E$, поэтому точка $D$ при этом повороте переходит в $B$, а это и значит, что треугольник $FDB$ – правильный.

4. Выпуклый многогранник содержит любой из тетраэдров, вершинами которых являются какие-либо четыре вершины многогранника. Существует ли многогранник, который не содержит ни один из таких тетраэдров?




*Ответ*: Существует.

*Решение*. Пример можно построить так. Возьмем правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ и повернем ее основание $A_1B_1C_1$ в его плоскости вокруг его центра на угол $\alpha < 60°$. Рассмотрим многогранник, полученный выбрасыванием из выпуклой оболочки треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ тетраэдров $ABA_1B_1$, $BCB_1C_1$ и $CAC_1A_1$ (на рисунке показан этот многогранник и одно из его сечений, параллельных основаниям). Этот многогранник не содержит ни одного из тетраэдров с вершинами в точках $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, т.к. любой из таких тетраэдров имеет в качестве ребра один из отрезков $BA_1$, $CB_1$ или $AC_1$, а все эти отрезки мы удалили вместе с тетраэдрами.