Олимпиада по геометрии (письменная)

Лига 8-9

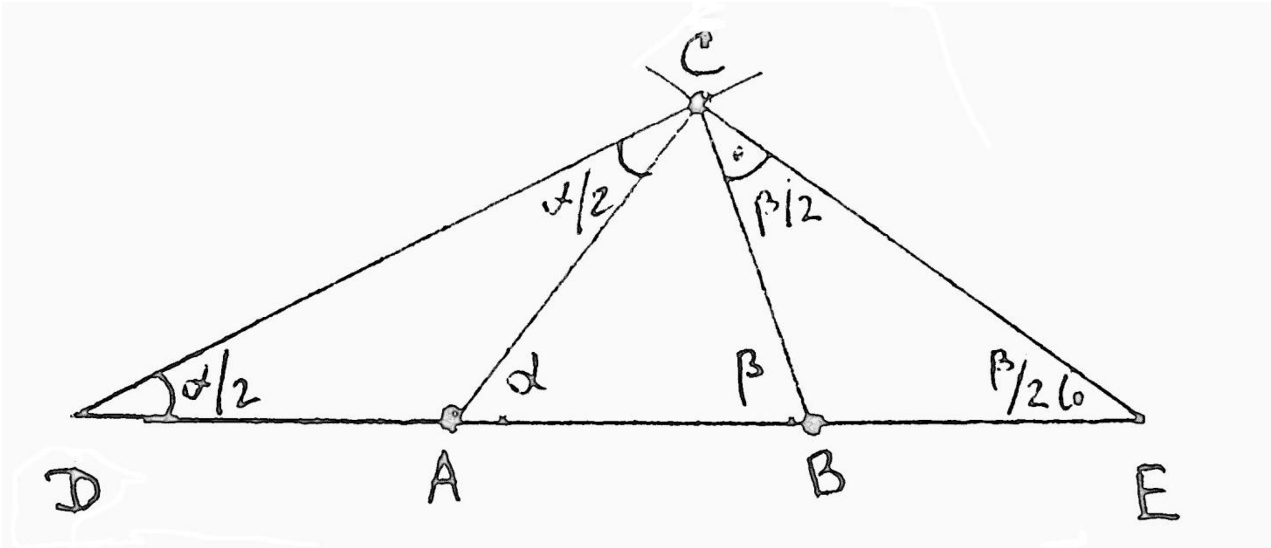
1. Можно ли построить треугольник (циркулем и линейкой без делений) по двум заданным углам α и β и

a) известному периметру P;

b) какой-либо высоте треугольника?

Если можно – привести алгоритм построения (последовательность действий) и указать количество различных треугольников в каждом случае; если нет – обосновать ответ.

Решение.



Для построения треугольника проделаем следующие действия:

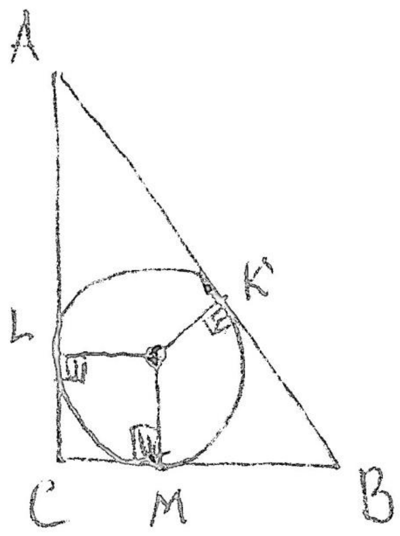
1) Строим отрезок ED=P – заданному периметру. **(1 балл)**
2) В концевых точках этого отрезка строим углы $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ (см. рис.) до пересечения вторых сторон этих углов в точке C; (+**1 балл)**
3) Из точки C во внутрь треугольника CDE проводим лучи под углами $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ до пересечения с DE в точках A и B. **(+1 балл)**
4) Доказательство, что треугольник ABC – искомый (плюс какие то слова о том, сколько таких треугольников). **(+1 балл)(4 балла)**

Если даны углы α и β, то с точностью до подобия дан треугольник ABC и d – длина высоты (какой либо, т.е. понятно какая высота). Тогда для треугольника ABC надо рассмотреть 3 случая: $d = h_c$, $d = h_a$, $d = h_b$.

За любой случай ставиться по **1 баллу**. Максимум **7 баллов**. Должны быть какие то слова или ссылки на то как опускать перпендикуляр из точки на прямую, как проводить параллельные прямые…

2. Найти стороны прямоугольного треугольника, если известны его периметр P и площадь S.

<u>Решение.</u>

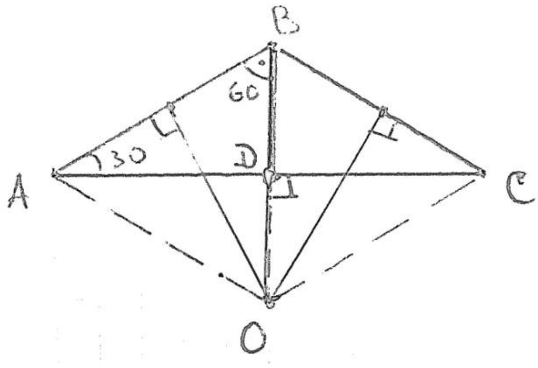


1) Если ввести стандартные обозначения: a,b – катеты, c – гипотенуза, $2p = P$, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей, то имеем следующую систему.
$$\begin{cases} a + b + c = 2p \\ \frac{1}{2}ab = pr = S \quad (1) \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2R \end{cases}$$ **(2 балла)**
2) из геометрии треугольника имеем следующие соотношения (см. рис.).
$2p = a + b + 2R = 2(AK + KB) + 2r = 4R + 2r \Leftrightarrow a + b = 2R + 2r = \sqrt{a^2 + b^2} + 2r \Leftrightarrow a + b - 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$
(+1 балл)
3) После возведения в квадрат получаем $ab + 2r^2 = 2r(a + b)$
$$\begin{cases} ab + 2r^2 = 2r(a + b) \\ \frac{1}{2}ab = pr = S \end{cases}$$ **(+1 балл)**
4) В итоге имеем систему
$$\begin{cases} a + b = p + \frac{p}{s} \\ ab = 2S \end{cases}$$ **(+1 балл)**
5) Откуда $a, b = \frac{1}{2}(p + \frac{p}{s}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(p + \frac{p}{s}\right)^2 - 2S}$ **(+1 балл)**
6) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(p + \frac{p}{s}\right)^2 - 4S}$ **(+1 балл)(7 баллов)**

Правильное, но чисто алгебраическое решение (без введения радиусов r и R) системы (1) оценивается в **+3 балла (в этом случае всего 5 баллов за решение)**

3. В море у берегов Камчатки регулярно фиксируются три подозрительных рыболовецких судна, традиционно находящихся в вершинах одного равнобедренного треугольника с углом $120°$ и длинами боковых сторон в 20 км. Найти геометрическое место точек (ГМТ) в пространстве, где можно разместить технические средства контроля (с радиусом действия не более 30 км) за незаконным выловом камчатского краба, чтобы все точки этого ГМТ были равноудалены от судов – потенциальных нарушителей природоохранного законодательства.

<u>Решение.</u>

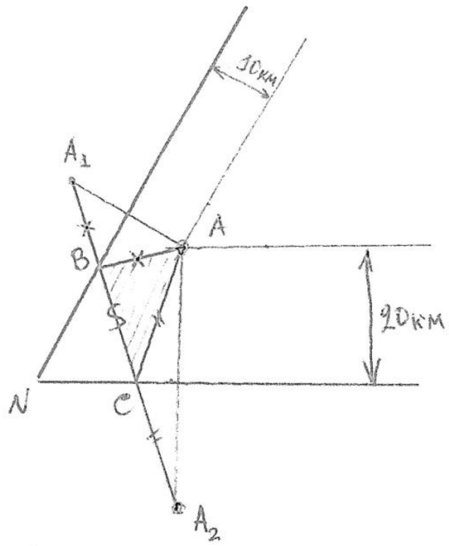


1) Если *A, B, C* – точки местонахождений судов, то треугольник *ABC* – равнобедренный с углами $B = 120°$, $A = C = 30°$ и *AB=BC=20* км. Тогда искомым ГМТ в плоскости треугольника *ABC* является точка *O* – центр описанной окружности как пересечение серединных перпендикуляров треугольника *ABC*. **(2 балла)**
2) Радиусы этой окружности *AO=BO=CO=R=(доказать!)=AB=BC=20* **(+2 балла)**
3) Тогда в пространстве R^3 искомое ГМТ – часть прямой, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости *ABC*. **(+1 балл)**
4) Итоговое ГМТ определяется двумя частями этой прямой:
   - подводной частью (где возможно размещение подлодки или подводного буя), которая определяется глубиной моря. **(+1 балл)**
   - надводной частью до высоты $h = \sqrt{30^2 - 20^2} = 10\sqrt{5}$ км, где возможно размещение беспилотника. **(+1 балл)(7 баллов)**

4. Две прямолинейные железные дороги пересекаются в пункте N под углом $60°$. Внутри этого угла находится аэродром (точка A) на расстояниях 10 км и 20 км от этих дорог. Найдите местоположения точек B и C (мест погрузки-разгрузки груза) на этих дорогах, чтобы стоимость циклических перевозок по шоссе из A в B, потом в C с возвратом в A была минимальна. Считая, что перевозка 1 т груза по шоссе $ABCA$ стоит 100 руб. за 1 км, определить

a) можно ли для груза в 10 т уложиться в сумму 50 тыс. руб., без учета затрат на погрузку-разгрузку грузов?
b) Тот же вопрос для суммы в 60 тыс. руб. с учетом затрат на полную перезагрузку грузов (2500 руб. за 10 т) в 2-х пунктах из 4-х? в 3-х пунктах из 4-х? во всех 4-х пунктах?

<u>Решение.</u>



1) Построим точку A, отразим ее симметрично относительно железных дорог: получим точки A_1 и A_2 (см. рис.)
   (2 балла)
2) Соединим точки A_1 и A_2, тогда пересечение этой линии с железными дорогами дает местонахождение точек B и C.
   (+1 балл)
3) Тогда периметр треугольника ABC минимален и равен отрезку A_1A_2. Если это доказано, то оценивается дополнительно. **(+1 балл)**
   (Доказательство основано на следующем принципе: если хотя бы одна из точек B или C сдвинется, то периметр треугольника ABC будет равен ломаной, соединяющей точки A_1 и A_2.)
4) Измерение линейкой дает $A_1A_2 \approx 53$ км (Сравнение циркулем с выбранным масштабом в 10 км дает $50 < A_1A_2 < 55$ км). Так расходы выходят в сумму равную
   $100\text{руб} * 10 * 53 = 53000\text{руб}$, т.е. в 50 т.р. не уложимся. **(+1 балл)**
5) С перезагрузкой грузов в двух пунктах уложиться можно, т.к.
   $53000 + 2500 * 2 = 58000 < 60000$,
   а в четырех пунктах уложиться заведомо нельзя, т.к.
   $53000 + 2500 * 4 = 63000 > 60000$. **(+1 балл)**
6) С перезагрузкой в трех пунктах из четырех сумма будет следующей:
   $53000 + 2500 * 3 = 60500$.
   Тут потребуется более точная оценка $2p_{ABC} = A_1A_2$. **(+1 балл)(7 баллов)**