Письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел»

Старшая лига

Условия и решения

1. Числа $x, y, z \neq 0$ таковы, что $\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}=1.$

   Какие значения может принимать выражение

   $\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)^{2016}+\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)^{2016}+\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}\right)^{2016}$?

   Ответ: 3.

   Решение: Домножим на $2xyz$, перенесем в одну сторону, получим $z(x^2+y^2-z^2)+x(y^2+z^2-x^2)+y(z^2+x^2-y^2)-2xyz=0$. Разложим на множители: $(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=0$. Следовательно, одно из чисел равно сумме двух других. Тогда выражения, стоящие в скобках равны ± 1.

2. Положительные числа $x_1, \dots, x_{2016}$ таковы, что $x_1+\dots+x_{2016}=1.$ Докажите, что

   $(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_{2016})<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{2015}{2016}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{2014}{2016}+\dots+\frac{1}{2016!}\cdot\frac{1}{2016}$

   Решение: Применим неравенство Коши:

   $\sqrt[2016]{(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_{2016})}\leq\frac{2016+x_1+\dots+x_{2016}}{2016}=1+\frac{1}{2016}.$

   Возведем в 2016 степень и раскроем по биному Ньютона:

   $(1+x_1)\cdot\ldots\cdot(1+x_{2016})\leq 1+C_{2016}^{1}\cdot\frac{1}{2016}+C_{2016}^{2}\cdot\left(\frac{1}{2016}\right)^2+\dots+C_{2016}^{2016}\cdot\left(\frac{1}{2016}\right)^{2016}.$

   Оценим k-е слагаемое в сумме

   $C_{2016}^{k}\left(\frac{1}{2016}\right)^k=\frac{2016!}{k!(2016-k)!}\cdot\left(\frac{1}{2016}\right)^k=\frac{1}{k!}\cdot\frac{(2016-k+1)\cdot\ldots\cdot2016}{2016^k}=$

   $\frac{1}{k!}\cdot\frac{(2016-k+1)}{2016}\cdot\frac{(2016-k+2)\cdot\ldots\cdot2016}{2016^k}\leq\frac{1}{k!}\cdot\frac{(2016-k+1)}{2016}$, причем при k>2 неравенство строгое.

3. Решите в целых числах систему:

   $$\begin{cases} abcd=c+199 \\ 51a^6+5c^2+20|b+d|=2016 \end{cases}$$

   Ответ: (-1,2,1,-100); (-1,-2,1,100); (-1,100,1,-2);(-1,-100,1,2).

   Решение: Преобразуем первое уравнение $c(abd-1)=199$. Число 199 – простое, следовательно, c может принимать занчения 1,-1,199,-199. Заметим, что второе уравнение не может быть выполнено при *c*=+/-199. Таким образом *c*=1,-1.

   Рассмотрим случай *c*=1 (случай *c*=-1 рассматривается аналогично).

   $$\begin{cases} abd=200 \\ 51a^6+20|b+d|=2011 \end{cases}$$

   Заметим, что $51\cdot16=3264>2016$, следовательно *a*=0,1,-1. Но а не может быть нулем, т.к. 2011 не делится на 20. Значит |*b*+*d*|=98 и $bd=\pm200$. При *a*=1 решений нет, а при *a*=-1 получаем 4 решения: *b*=2,*d*=-100; *b*=-2,*d*=100; *b*=100,*d*=-2; *b*=-100,*d*=2.

4. Дан многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами, такой, что уравнение $P_n(x)=2016$ имеет не менее пяти целочисленных решений. Докажите, что уравнение $P_n(x)=2001$ не имеет решений в целых числах.

   Решение: По т. Безу $P_n(x)-2016=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_5)Q(x)$. Подставив 2001, получим $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_5)Q(x)$=15, но 15 нельзя представить как произведение 5 различных целочисленных сомножителей (максимум 4, например: 1,-1,3,-5).