

Письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел»
Младшая лига

Условия и решения

1. Найдите $2a + 3b + 4c$, если известно, что

$$\begin{cases} a^2 + 2 = 4b + c, \\ b^2 + 3 = 3c - a, \\ c^2 + 4 = 5a - 2b \end{cases}$$

2. Найдите все тройки простых чисел (a, b, c) такие, что $a - b - 8$ и $b - c - 8$ тоже простые.
3. Для любого натурального числа n

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}.$$

Найдите $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

4. Найдите все пятизначные числа, состоящие из ненулевых цифр, такие, что, каждый раз зачеркивая первую цифру, мы получаем делитель предыдущего числа.

Решения

Задача 1.

Ответ: 15

Сложим все уравнения и выделим полные квадраты. Получим $(a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c - 2)^2 = 0$, тогда $a = 2, b = 1$ и $c = 2$. Тогда $2a + 3b + 4c = 15$.

Задача 2.

Ответ: $(23, 13, 2), (23, 13, 3)$

Случай 1. Пусть $a - b - 8$ и $b - c - 8$ оба четные, тогда $a - b - 8 = b - c - 8 = 2$. Тогда $a = c + 20, b = c + 10$. Но $c, c + 10, c + 20$ дают разные остатки при делении на 3.

Поэтому единственный случай, который нам подходит – это $(23, 13, 3)$.

Случай 2. Пусть $a - b - 8$ – нечетное. Тогда a и b разной четности. А раз $a > b$, то $b = 2$. Но $b > c - 8$. Значит, такого случая быть не может.

Случай 3. Пусть $b - c - 8$ – нечетное. Из аналогичных соображений получаем $c = 2$. Из предыдущего случая мы знаем, что $a - b - 8$ может быть только четным, следовательно $a - b - 8 = 2$. Поэтому $a = b + 10$. Итак, мы доказали, что числа $b + 10, b, b - 10$ – простые. Они дают разные остатки при делении на 3. Поэтому $b - 10 = 3$. Получаем решение $(23, 13, 2)$.

Задача 3.

Ответ: 364

Пусть $x = \sqrt{2n + 1}$, а $y = \sqrt{2n - 1}$. Тогда $x^2 + y^2 = 4n, xy = \sqrt{4n^2 - 1}, x^2 - y^2 = 2$.

Получаем $f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(2n + 1)^3} - \frac{1}{2} \sqrt{(2n - 1)^3}$.

Тогда $f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \frac{1}{2} \sqrt{81^3} - \frac{1}{2} \sqrt{1^3} = 364$.

Задача 4.

Ответ: 91125, 53125, 95625.

Пусть наше число – это $\overline{abcde}$. Тогда $\overline{abcde} : \overline{bcde}$. Следовательно, $a \cdot 10^4 : \overline{bcde}$. Тогда $\overline{bcde} = x \cdot 2^k \cdot 5^l$, где $x|a$.

Пусть $l = 0$, тогда $\overline{bcde} \leq 9 \cdot 2^4 = 144$. Следовательно, $b = 0$. Но нам нужны все ненулевые цифры.

Итак, $l > 0$. Но тогда $k = 0$. Иначе $\overline{bcde} : 10$.

Докажем, что $l > 2$. Предположим противное, но тогда $\overline{bcde} \leq 9 \cdot 5^2 = 225$.

Случай 1. Пусть $l = 3$. Тогда $x = 9$. Иначе $\overline{bcde} \leq 8 \cdot 125$. Получившееся число – это 91125.

Случай 2. Пусть $l = 4$. Тогда $\overline{bcde} = x \cdot 625$. Заметим, что x – нечетное и $x \geq 3$. Оставшееся проверяем.

Если $x = 3$, то $\overline{bcde} = 1875$. Но 1875 не делится на 875.

Если $x = 5$, то $\overline{bcde} = 3125$. Получаем 53125 и оно нам подходит.

Если $x = 7$, то $\overline{bcde} = 4375$. Но 4375 не делится на 375.

Если $x = 9$, то $\overline{bcde} = 5625$. Получаем 95625 и оно нам подходит.