

Письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел»

Старшая лига

1. Числа $x, y, z \neq 0$ таковы, что $\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2xz} = 1$.

Какие значения может принимать выражение

$$\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)^{2016} + \left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)^{2016} + \left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}\right)^{2016} ?$$

2. Положительные числа $x_1, \dots, x_{2016}$ таковы, что $x_1 + \dots + x_{2016} = 1$. Докажите, что

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_{2016}) < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{2015}{2016} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{2014}{2016} + \dots + \frac{1}{2016!} \cdot \frac{1}{2016}$$

3. Решите в целых числах систему:

$$\begin{cases} abcd = c + 199 \\ 51a^6 + 5c^2 + 20|b+d| = 2016 \end{cases}$$

4. Дан многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, такой, что уравнение $P_n(x) = 2016$ имеет не менее пяти целочисленных решений. Докажите, что уравнение $P_n(x) = 2001$ не имеет решений в целых числах.