Регата

Младшая лига

Первый тур

1a. Вычислите $ab + cd$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$.

1g. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC отметили точки E и F таким образом, что $AF = AB$ и $CE = CB$, причем точки E и F не совпадают с B. Докажите, что $DE = DF$.

1c. Сколькими способами можно выбрать 3 различных натуральных числа от 1 до 100 так, чтобы их произведение делилось на 4?

Второй тур

2a. Пусть x — натуральное число, y — цифра. Известно, что

$$x(x+2) = \overline{\dots 7y}\,.$$

Какие значения может принимать y?

2g. Вершины выпуклого многоугольника расположены в узлах целочисленной решетки, причем ни одна из его сторон не проходит по линиям решетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий решетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме горизонтальных отрезков.

2c. На шахматной доске 8×8 произвольно проведена прямая. Какое наибольшее число клеток она может пересечь? (Пересечение считается только по внутренним точкам клеток.)

Третий тур

3a. Вычислите сумму

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \dots + \frac{100}{98!+99!+100!}\,.$$

3g. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка M — середина диагонали AC, N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FMN правильный.

3c. В таблице $n \times n$ в первых двух клетках верхнего ряда стоят минусы, а во всех остальных клетках плюсы (рис. 1). За одну операцию разрешается менять знак во всех клетках одного столбца или одной строки на противоположный. После применения нескольких операций оказалось, что в таблице стоит ровно 9 минусов. Какое наименьшее значение может принимать n?

Четвертый тур

4a. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geqslant 6\,.$$

4g. P и Q — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно. Диагонали прямоугольника $PQDC$ пересекаются в точке R. Оказалось, что AP является биссектрисой угла BAR. Найдите длину стороны BC, если $AB = 1$.

4c. Ежик в тумане может ходить по дугам окружностей целочисленного радиуса с центрами в точках с целочисленными координатами. Менять одну дугу на другую он может тоже только в целых точках. Может ли ежик за несколько таких переходов попасть из точки с координатами $(0, 0)$ в точку с координатами $(0, 1)$?

Старшая лига

Первый тур

1a. Найдите все натуральные n такие, что для некоторого простого числа p верно

$$p \leqslant \frac{n^2}{5} < p + 1\,.$$

1g. Дан треугольник ABC с прямым углом C. Найдите на гипотенузе AB все точки X такие, что $CX^2 = AX \cdot BX$.

1c. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет нуля, а любые две цифры различны и не имеют общих делителей, кроме единицы?

−	−	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

Рис. 1: к условию задачи 3c

Второй тур

2a. Докажите, что если какая-нибудь пара действительных чисел x и y удовлетворяет уравнениям

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0\,,$$

то эта же пара чисел удовлетворяет уравнению

$$xy - 12x + 15y = 0\,.$$

2g. В треугольнике ABC точка O — центр вневписанной окружности, которая касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что точки A, B, C и центр описанной окружности треугольника ABO лежат на одной окружности.

2c. В 10-серийном сериале нет персонажа, который встречается во всех сериях. Известно, что в любых 6 сериях есть общий персонаж. Какое наименьшее количество персонажей может быть в таком сериале?

Третий тур

3a. Про действительные числа x, y, z известно, что

$$x + y + z = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 6\,.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $|(x - y)(y - z)(x - z)|$?

3g. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка D — середина основания AC, E — основание перпендикуляра из точки D на сторону BC, F — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника ADB и отрезка AE. Докажите, что прямая BF проходит через середину отрезка DE.

3c. На плоскости расположено 2016 правильных треугольников (не обязательно равных). На какое наибольшее число частей они могут разбивать плоскость?

Четвертый тур

4a. Дана произвольная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличная от константы. Докажите, что найдутся такие $x, y \in \mathbb{R}$, что $f(x + y) < f(xy)$.

4g. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $BL = AB$. На продолжении BL за точку L выбрана точка M такая, что $\angle BAM + \angle BAL = 180^\circ$. Докажите, что $BM = BC$.

4c. По кругу лежат 2016 шаров, каждый из которых покрашен в один из 32 цветов, причем шаров каждого цвета ровно 63. Найдите наименьшее n с таким условием: гарантированно найдутся n последовательных шаров, среди которых встречается хотя бы 16 цветов.